Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 7 gennaio 2009

1. Se $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := x^3 - 4x$, allora (1/-1 punti a risposta)
   (a) -1 è l'unico minimo relativo;
   (b) f è pari;
   (c) f ha due punti di massimo relativo per f;
   (d) f ha quattro punti stazionari.

2. Se $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^n n^4}{2+n^4} \qquad$ allora (indicare la risposta esatta - 2/-.5 punti) :

$$(a)\ \sup_n a_n = 0, (b)\ \sup_n a_n = 1, (c)\ \sup_n a_n = 2, (d)\ \sup_n a_n = -1, (e)\ \sup_n a_n = +\infty.$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (2 punti ciascuno)
   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - \sqrt{n!}}{2^n - n^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+2^n)}{n+1}$
   (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \sin(n) - n^3}{1+n^2} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sqrt[3]{n^3 + 6n + 4} - n^2$

4. Calcolare il limite (6 punti – DA SVOLGERE)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \sqrt[3]{1-6x^2}}{x^4}$$

5. In ognuno dei casi seguenti si indichi se la serie converge assolutamente (AC), converge ma non assolutamente (C) oppure non converge (NC) (punti 1.5/-0.75 per ognuna).
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n^2+1)}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln(n)}$
   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!2^n}{n^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$

6. Sia $f(x) := 3\arctan(x) + e^{2x}$. Allora $(f^{-1})'(1)$ vale (punti 2/-0.5):

$$(a)\ \frac{1}{3+e^2}, \quad (b)\ \frac{1}{3+2e}, \quad (c)\ \frac{1}{5}, \quad (d)\ \frac{1}{4}, \quad (e)\ 5.$$

7. Si calcoli il valore del seguente integrale improprio (punti 4):

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(4+x^2)^2}\,dx$$

8. Si consideri l'equazione differenziale (punti 8 in tutto DA SVOLGERE)

$$y' = \frac{2}{x+2}y - \frac{x+2}{1-x^2} \qquad -1 < x < 1.$$

   (a) Per ogni y_0 in $\mathbb{R}$ si trovi l'espressione analitica della soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = y_0$.
   (b) Si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to 1^-$.
   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni più signicative (sempre al variare di y_0), mettendone in evidenza gli intervalli di monotonia.
   (d) Si trovi per quali valori di y_0 (se ce ne sono) la soluzione $y(x)$ è strettamente decrescente in $]-1, 1[$.