Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 1 settembre 2008

1. Se $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := 2x^2 - x^3$, allora (1/-1 punti a risposta)

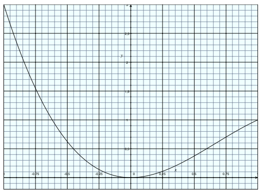
   (a) 0 è di minimo per f $\boxed{\text{SI}}$;

   (b) f ha un unico minimo relativo $\boxed{\text{SI}}$;

   (c) 1 è un punto di massimo per f $\boxed{\text{NO}}$;

   (d) f ha due punti stazionari $\boxed{\text{NO}}$.

   Spiegazione. Facendo un rapido studio di funzione (vedi la figura) si perviene al grafico mostrato nella figura, da cui si traggono tutte le conclusioni indicate sopra.



$\square$

2. Se $$a_n = (-1)^{n+1} \frac{n^2}{3-n}$$ allora (indicare la risposta esatta - 2/-.5 punti)

   (a) $\inf_n a_n = 0$, (b) $\inf_n a_n = 1$, (c) $\inf_n a_n = -1$, (d) $\inf_n a_n = \boxed{-\infty}$, (e) $\inf_n a_n = (-1)^n$.

   Spiegazione. Se si considera la sottosuccessione relativa agli indici n dispari si ottiene:

$$a_{2k+1} = \frac{(2k-1)^2}{3-2k-1} = \frac{4k^2-4k+1}{2-2k} \to -\infty.$$

   Quindi (a_n) non è limitata inferiormente, cioè il suo estremo inferiore è $+\infty$. $\square$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (2 punti ciascuno)

   (a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n^4+4)} = \boxed{1}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^6 - 6n^4 + 1} - n^2 = \boxed{-2}$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - e^n} = \boxed{3}$ (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{n^{12} + \ln(n)}}{1-n^2} = \boxed{-\infty}$

   Spiegazione.
   - dato che (per motivi noti, oppure usando de l'Hôpital)
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^4+4)}{n} \to 0$$
   allora per n grande vale $1 \le \ln(n^4+4) \le n$, da cui $1 \le \sqrt[n]{\ln(n^4+4)} \le \sqrt[n]{n}$; essendo $\sqrt[n]{n} \to 1$ si deduce $\sqrt[n]{\ln(n)^4+4} \to 1$, per i due carabinieri;
   - si ha:
   $$\sqrt[3]{n^6 - 6n^4 + 1} - n^2 = n^2 \left(\left(1 - \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^6}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) = n^2 \left(1 - \frac{1}{3}\frac{6}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) \to -2;$$
   - $\sqrt[n]{3^n - e^n} = 3\sqrt[n]{1 - \left(\frac{e}{3}\right)^n} \to 3$ (nota che $\left(\frac{e}{3}\right)^n \to 0$ dato che $e < 3$);

- si ha:
$$\frac{\sqrt[5]{n^{12}+\ln(n)}}{1-n^2} = \frac{n^{\frac{12}{5}}}{n^2}\frac{\sqrt[5]{1+o(1)}}{o(1)-1} = n^{\frac{2}{5}}(-1+o(1)) \to -\infty.$$

□

4. Calcolare il limite (6 punti – DA SVOLGERE)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(2x)+\cos(x))-2x}{1-\sqrt{\cos(3x)}}$$

Svolgimento. Il limite proposto è nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applichiamo (due volte) il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(2x)+\cos(x))-2x}{1-\sqrt{\cos(3x)}} \overset{\text{(Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\cos(2x)-\sin(x)}{\sin(2x)+\cos(x)}-2}{\frac{3\sin(3x)}{2\sqrt{\cos(3x)}}} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)-\sin(x)-2\sin(2x)-2\cos(x)}{\sin(2x)+\cos(2x)}\frac{2\sqrt{\cos(3x)}}{3\sin(3x)} =$$
$$\frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)-\sin(x)-2\sin(2x)-2\cos(x)}{\sin(3x)} \overset{\text{(Hôpital)}}{=}$$
$$\frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{-4\sin(2x)-\cos(x)-4\cos(2x)+2\sin(x)}{3\cos(3x)} = \frac{2}{3}\frac{-5}{3} = \boxed{-\frac{10}{9}}.$$

□

5. In ognuno dei casi seguenti si indichi se la serie converge assolutamente (AC), converge ma non assolutamente (C) oppure non converge (NC) (punti 1.5/-0.75 per ognuna).

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)$ $\boxed{\text{AC}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ $\boxed{\text{AC}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos\left(\frac{n^2+2}{n^4+2}\right)$ $\boxed{\text{NC}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ $\boxed{\text{C}}$

Spiegazione.
- Poniamo $a_n := (-1)^n \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)$; allora
$$|a_n| = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{n^2-1}\right) \approx \frac{2}{n^2-1}$$
e dato che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$ si ha che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- Poniamo $a_n := \frac{2^n n!}{n^n}$; usando il criterio del rapporto
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} \to \frac{2}{e} < 1$$
per cui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- Poniamo $a_n : n = (-1)^n \cos\left(\frac{n^2+2}{n^4+2}\right)$; allora
$$|a_n| = \cos\left(\frac{n^2+2}{n^4+2}\right) \to 1 \neq 0$$
e quindi la serie non converge, dato che il suo termine generale non tende a zero.

- Poniamo $a_n := (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$; allora

$$|a_n| = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \approx \frac{2}{n-1}$$

per cui la serie non converge assolutamente, per confronto con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n-1} = +\infty$; però si vede facilmente che $|a_n|$ è decrescente rispetto a n e tende a zero, per cui, essendo la serie a segni alterni, essa converge per il criterio di Leibniz.

□

6. Date due funzioni f e g definite in un intorno di zero tali che $f(x) = 3+x-3x^2+o(x^2)$, $g(x) = 1+2x-x^2+o(x^2)$ e posto $h(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ si ha (punti 2/-0.5):

(a) $h''(0) = 0$, (b) $h''(0) = 10$, (c) $h''(0) = -10$, (d) $h''(0) = \boxed{20}$, (e) $h''(0) = -20$.

Spiegazione. Si ha:

$$h(x) = \frac{3+x-3x^2+o(x^2)}{1+2x-x^2+o(x^2)} = 3 + \frac{3+x-3x^2+o(x^2)}{1+2x-x^2+o(x^2)} - 3 =$$
$$3 + \frac{-5x+o(x^2)}{1+2x-x^2+o(x^2)} = 3 + x\frac{-5+o(x)}{1+2x+o(x)} = 3-5x+x\left(\frac{-5+o(x)}{1+2x-o(x)}+5\right) =$$
$$3-5x+x\frac{10x+o(x)}{1+o(1)} = 3-5x+10x^2\frac{1+o(1)}{1+o(1)} =$$
$$3-5x+10x^2(1+o(1)) = 3-5x+10x^2+o(x^2).$$

Ne segue che $\frac{h''(0)}{2} = 10 \Leftrightarrow h''(0) = 20$. □

7. Si calcoli il valore del seguente integrale improprio (punti 4):

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(3+x)}\, dx$$

Spiegazione. Se operiamo la sostituzione $y = \sqrt{x}/\sqrt{3}$ troviamo $x = 3y^2$ e $dx = 6ydy$ e quindi:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(3+x)}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{6y}{\sqrt{3}y(3+3y^2)}\, dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\, dy =$$
$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan(y)\right]_0^{+\infty} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}\pi}{3}}.$$

□

8. Si consideri l'equazione differenziale (punti 8 in tutto DA SVOLGERE)

$$y' = \frac{2}{x^2-1}y - x \qquad -1 < x < 1.$$

(a) Per ogni y_0 in $\mathbb{R}$ si trovi l'espressione analitica della soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = y_0$.

(b) Si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to 1^-$.

(c) Si traccino i grafici delle soluzioni più signicative (sempre al variare di y_0), mettendone in evidenza gli intervalli di monotonia.

(d) Si trovi per quali valori di y_0 (se ce ne sono) la soluzione $y(x)$ è strettamente crescente in $]-1,1[$.

Svolgimento. Applichiamo la formula risolutiva con $a(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$ e $b(x) = -x^2$ (seguendo le notazioni delle dispense). Allora (usando $x_0 = 0$)

$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Ne segue (ricordando che $-1 < x < 1$ e prendendo il giusto valore del modulo):

$$y(x) = \frac{1-x}{1+x}\left(y_0 - \int_0^x t\frac{1+t}{1-t}\,dt\right).$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^x t\frac{1+t}{1-t}\,dt = \int_0^x t\left(-1+\frac{2}{1-t}\right) dt = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_0^x + \int_0^x \frac{2t}{1-t}\,dt =$$
$$-\frac{x^2}{2} + 2\int_0^x \left(-1+\frac{1}{1-t}\right) dt = -\frac{x^2}{2} + 2\left[-t-\ln|t-1|\right]_0^x =$$
$$-\frac{x^2}{2} - 2x - \ln((x-1)^2).$$

Quindi

$$y(x) = \frac{1-x}{1+x}\left(y_0 + \frac{x^2+4x}{2} + \ln((x-1)^2)\right).$$

Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > \frac{3}{2} - \ln(4), \\ 0 & \text{se } y_0 = \frac{3}{2} - \ln(4), \\ -\infty & \text{se } y_0 < \frac{3}{2} - \ln(4). \end{cases}$$

(dove il caso con "=" si discute facilmente con de l'Hôpital), mentre

$$\lim_{x\to 1^-} y(x) = 0^-$$

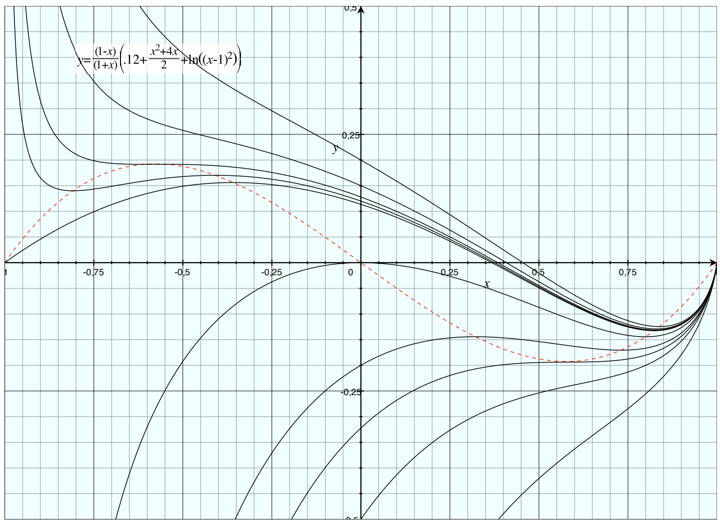
(il polinomio $x-1$ "vince" su $\ln((x-1)^2)$, che comunque, andando a $-\infty$ determina il segno negativo).

Per discutere la monotonia introduciamo la funzione ausiliaria $g(x) := \dfrac{x(x^2-1)}{2}$, per $-1 < x < 1$, che per come è scritta l'equazione differenziale, ha la proprietà:

$$y'(x) > 0 \Leftrightarrow y(x) > g(x), \qquad y'(x) < 0 \Leftrightarrow y(x) < g(x), \qquad y'(x) = 0 \Leftrightarrow y(x) = g(x).$$

per tutte le x tra -1 e 1. Facendo un rapido studio di funzione si può tracciare il grafico di g (curva tratteggiata rossa nella figura) e di conseguenza i grafici delle soluzioni. Notiamo che g ha massimo nel punto $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, in cui g vale $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ e ha minimo in $\frac{1}{\sqrt{3}}$ in cui la g vale $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$. Dunque, nella figura, le soluzioni importanti sono le tre curve con $y_0 = C_1(\approx .1279)$ CHE PASSA per $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$, quella con $y_0 = C_2(\approx -.3222)$ CHE PASSA per $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$) e quella con $y_0 = \frac{3}{2} - \ln(4)$ (che divide le curve che vanno a $-\infty$ da quelle che vanno a $+\infty$, nel punto $x = -1$).

In particolare le soluzioni sono strettamente crescenti su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $y_0 \le C_2$.



y=(1-x)/(1+x)(.12+(x²+4x)/2+ln((x-1)²))
y
x
0,5
0,25
-0,25
-0,5
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75

□