Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 14 luglio 2008

1. Se $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := 2x^4 - 4x^2 + 1$, allora (1/-1 punti a risposta)

   (a) f ha due punti di minimo: $\boxed{\text{SÌ}}$;

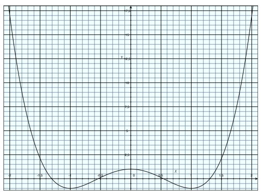
   (b) f ha due massimi relativi: $\boxed{\text{SÌ}}$;

   (c) 0 è un massimo relativo per f: $\boxed{\text{NO}}$;

   (d) f ha cinque punti stazionari: $\boxed{\text{NO}}$.

   Spiegazione. Facendo un rapido studio di funzione (vedi la figura) si vede che:

   - il minimo di f vale -1 ed è assunto nei DUE punti -1 e 1;
   - f ha massimo pari a 17 (assunto in due punti, -2 e 2, ma questo non riguarda la domanda) e ha un altro massimo relativo pari a 1 (assunto nel punto 0) – in tutto fanno due;
   - 0 è PUNTO di massimo relativo per f, ma non è un massimo relaivo;
   - f ha solo TRE punti stazionari che sono -1, 0 e 1..



$\square$

2. Se $$a_n = \frac{(-1)^n n^2}{2+n^2}$$ allora (indicare la risposta esatta - 2/-.5 punti) :

   (a) $\sup_n a_n = 0$, (b) $\sup_n a_n = \boxed{1}$, (c) $\sup_n a_n = 2$, (d) $\sup_n a_n = -1$, (e) $\sup_n a_n = +\infty$.

   Spiegazione. Si ha

   $$a_{2n} = \frac{4n^2}{2+4n^2} \leq \frac{4n^2}{4n^2} = 1, \qquad a_{2n+1} = -\frac{(2n+1)^2}{2+(2n+1)2} \leq 0$$

   da cui $a_n \leq 1$ e quindi $\sup a_n \leq 1$. D'altra parte:

   $$a_{2n} = \frac{4n^2}{2+4n^2} \to 1.$$

   Quindi $\sup a_n = 1$. $\square$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (2 punti ciascuno)

   (a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n - n!} = \boxed{+\infty}$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{n^5 - 15n^4 + n^3 - 12} - n = \boxed{-3}$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n^2+1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$

   (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^8+n}}{1-n^3} = \boxed{0}$

Spiegazione. • si ha

$$\sqrt[n]{n^n - n!} = n \underbrace{\sqrt[n]{1 - \underbrace{\frac{n^n}{n!}}_{\to 0}}}_{\to 1} \to +\infty;$$

• si ha:

$$\sqrt[5]{n^5 - 15n^4 + n^3 - 12} - n = n\left(\left(\left(1 - \frac{15}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{\frac{1}{5}} - 1\right) = n\left(1 - \frac{1}{5}\frac{15}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \to -3;$$

• si ha:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n^2+1)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n^2) + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\ln(n) + o(1)}{2\ln(n) + o(1)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)}\frac{1+o(1)}{2+o(1)} = \frac{1+o(1)}{2+o(1)} \to \frac{1}{2};$$

• si ha:

$$\frac{\sqrt[3]{n^8+n}}{1-n^3} = \frac{n^{\frac{8}{3}}}{n^3}\frac{\sqrt[3]{1+n^{-7}}}{n^{-3}-1} = n^{-\frac{1}{3}}\frac{\sqrt[3]{1+n^{-7}}}{n^{-3}-1} \to 0\left(\frac{1}{-1}\right) = 0.$$

□

4. Calcolare il limite (6 punti – DA SVOLGERE)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(3x) + \cos(2x)) - 3x}{1 - \sqrt{\cos(x)}}$$

Svolgimento. Il limite proposto è nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applichiamo (due volte) il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(3x) + \cos(2x)) - 3x}{1 - \sqrt{\cos(x)}} \overset{\text{(Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{3\cos(3x) - 2\sin(2x)}{\sin(3x)+\cos(2x)} - 3}{\dfrac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x) - 2\sin(2x) - 3\sin(3x) - 3\cos(2x)}{\sin(3x)+\cos(2x)} \frac{2\sqrt{\cos(x)}}{\sin(x)} =$$

$$2\lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x) - 2\sin(2x) - 3\sin(3x) - 3\cos(2x)}{\sin(x)} \overset{\text{(Hôpital)}}{=}$$

$$2\lim_{x\to 0} \frac{-9\sin(3x) - 4\cos(2x) - 9\cos(3x) + 6\sin(2x)}{\cos(x)} = 2(-13) = \boxed{-26}.$$

□

5. In ognuno dei casi seguenti si indichi se la serie converge assolutamente (AC), converge ma non assolutamente (C) oppure non converge (NC) (punti 1.5/-0.75 per ognuna).

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n}$ $\boxed{\text{NC}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$ $\boxed{\text{AC}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ $\boxed{\text{AC}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ $\boxed{\text{C}}$

Spiegazione. • Poniamo $a_n := \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$; allora $a_n = b_n + c_n$ dove $b_b = \dfrac{(-1)^n}{n}$ e $c_n = \dfrac{1}{n}$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge per Leibniz, mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge esse la serie armonica. Ne segue che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non può convergere (altrimenti la serie armonica sarebbe convergente per differenza).

- Poniamo $a_n := (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$; allora:

$$|a_n| = \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right) \leq \frac{\pi}{n^2}$$

per cui la serie converge assolutamente per confronto con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n^2} < +\infty$.

- Poniamo $a_n := (-1)^n \dfrac{n!}{n^n}$ e applichiamo il criterio del rapporto a $|a_n|$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$$

per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ e di conseguenza $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente.

- Poniamo $a_n := (-1)^n \sin\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)$. Allora $|a_n| \approx \dfrac{1}{n}$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, cioè la serie non converge assolutamente. Non è però difficile vedere che $|a_n|$ è decrescente e infinitesima per cui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |a_n|$ converge per Leibniz

□

6. Sia $f(x) := 2\arctan(x) + e^x$. Allora $(f^{-1})'(1)$ vale (punti 2/-0.5):

$$(a)\ \frac{1}{1+e}, \quad (b)\ 1+3, \quad (c)\ 3, \quad (d)\ \boxed{\frac{1}{3}}, \quad (e)\ \frac{1}{2}.$$

Spiegazione. Si ha $f(0) = 2\arctan(0) + e^0 = 1$ da cui $f^{-1}(1) = 0$. Inoltre $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} + e^x$ e quindi (servirà tra un momento) $f'(0) = 2 + 1 = 3$. Per la formula sulla derivata della funzione inversa

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$

□

7. Si calcoli il valore del seguente integrale improprio (punti 4):

$$\int_0^1 \frac{Ax+1}{\sqrt{x-x^2}}\, dx = \boxed{\frac{(A+2)}{2}\pi.}$$

Spiegazione. Se operiamo la sostituzione $y = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$, da cui $x = \frac{y^2}{1+y^2}$ e $dx = \frac{2y}{(1+y^2)^2} dy$, troviamo:

$$\int_0^1 \frac{Ax+1}{\sqrt{x-x^2}}\, dx = \int_0^1 \frac{Ax+1}{x} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{Ay^2}{1+y^2}+1}{\frac{y^2}{1+y^2}} y \frac{2y}{(1+y^2)^2} dy =$$

$$2\int_0^{+\infty} \frac{((A+1)y^2+1)}{(y^2+1)^2}\, dy = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\, dy + A\int_0^{+\infty} \frac{y \cdot 2y}{(y^2+1)^2}\, dy = \text{(il secondo per parti)}$$

$$2\left[\arctan(y)\right]_0^{+\infty} + A\left[y\frac{-1}{y^2+1}\right]_0^{+\infty} + A\int_0^1 \frac{1}{y^2+1}\, dy =$$

$$2\frac{\pi}{2} - 0 + A\left[\arctan(y)\right]_0^{+\infty} = \pi + A\frac{\pi}{2} = \frac{(A+2)}{2}\pi.$$

□

8. Si consideri l'equazione differenziale (punti 8 in tutto DA SVOLGERE)

$$y' = \frac{2}{x^2-1}y + x^2 \qquad -1 < x < 1.$$

(a) Per ogni y_0 in $\mathbb{R}$ si trovi l'espressione analitica della soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = y_0$.

(b) Si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to 1^-$.

(c) Si traccino i grafici delle soluzioni più signicative (sempre al variare di y_0), mettendone in evidenza gli intervalli di monotonia.

(d) Si trovi per quali valori di y_0 (se ce ne sono) la soluzione $y(x)$ è strettamente crescente in $]-1,1[$.

Svolgimento. Applichiamo la formula risolutiva con $a(x) = \frac{2}{x^2-1}$ e $b(x) = x^2$ (seguendo le notazioni delle dispense). Allora (usando $x_0 = 0$)

$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Ne segue (ricordando che $-1 < x < 1$ e prendendo il giusto valore del modulo):

$$y(x) = \frac{1-x}{1+x}\left(y_0 + \int_0^x t^2\frac{1+t}{1-t}\,dt\right).$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^x t^2\frac{1+t}{1-t}\,dt = \int_0^x t^2\left(-1+\frac{2}{1-t}\right) dt = \left[-\frac{t^3}{3}\right]_0^x + \int_0^x \frac{2t^2}{1-t}\,dt =$$
$$-\frac{x^3}{3} + 2\int_0^x \left(\frac{t^2-1}{1-t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = -\frac{x^3}{3} - 2\int_0^x (t+1)\,dt + 2\left[-\ln|t-1|\right]_0^x =$$
$$-\frac{x^3}{3} - x^2 - 2x - \ln((x-1)^2).$$

Quindi

$$y(x) = \frac{1-x}{1+x}\left(y_0 - \frac{x^3+3x^2+6x}{3} - \ln((x-1)^2)\right).$$

Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > -\frac{4}{3} + \ln(4), \\ 0 & \text{se } y_0 = -\frac{4}{3} + \ln(4), \\ -\infty & \text{se } y_0 < -\frac{4}{3} + \ln(4). \end{cases}$$

(dove il caso con "=" si discute facilmente con de l'Hôpital), mentre

$$\lim_{x\to 1^-} y(x) = 0^+$$

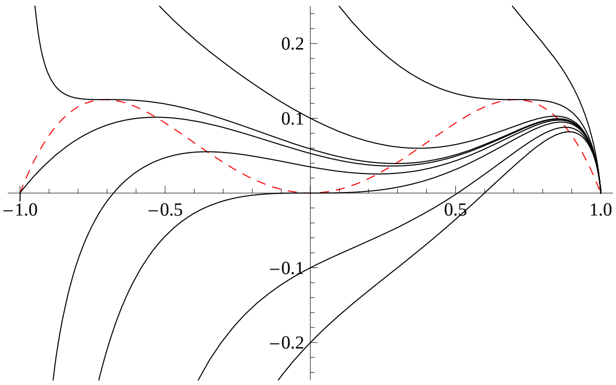
(il polinomio $x-1$ "vince" su $\ln((x-1)^2)$, che comunque, andando a $-\infty$ determina il segno negativo).

Per discutere la monotonia introducuamo la funzione ausiliaria $g(x) := -\frac{x^2(x^2-1)}{2}$, per $-1 < x < 1$, che per come è scritta l'equazione differenziale, ha la proprietà:

$$y'(x) > 0 \Leftrightarrow y(x) < g(x), \qquad y'(x) < 0 \Leftrightarrow y(x) > g(x), \qquad y'(x) = 0 \Leftrightarrow y(x) = g(x).$$

per tutte le x tra -1 e 1. Facendo un rapido studio di funzione si può tracciare il grafico di g (curva tratteggiata rossa nella figura) e di conseguenza i grafici delle soluzioni.

Notiamo che i due punti di minimo per g sono $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ in cui la g vale $\frac{1}{8}$. Dunque, nella figura, le soluzioni importanti sono le quattro curve con $y_0 = 0$ (che passa per $(0,0)$), quella con $y_0 = \frac{7}{8} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \ln\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$ (che passa per $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{8}\right)$), quella con $y_0 = \frac{7}{8} + \frac{4\sqrt{2}}{3} + \ln\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$ (che passa per $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{8}\right)$) e quella con $y_0 = -\frac{4}{3} + \ln(4)$ (che divide le curve che vanno a $-\infty$ da quelle che vanno a $+\infty$, nel punto $x = -1$).



In particolare le soluzioni sono strettamente crescenti su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $y_0 \geq \frac{7}{8} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \ln\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$. $\square$