Corso di Algebra Lineare e Analisi Matematica II

Anno Accademico 2018-2019

SESTA PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II

Seconda parte

Pisa, 27.01.20

Nome e cognome **Matricola**

1. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \log(1+|y|x)$ dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y|x > -1\}$.

(a) Tracciare un disegno (approssimativo) di A e calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad .$$

(b) Dire, motivando la risposta, in quali punti di A esistono le derivate parziali $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ e calcolarle.

(c) Provare che f è differenziabile nel punto $O = (0,0)$.

(d) Scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado per f nel punto $P = (0,1)$.

2. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il solido definito da

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2+y^2 \,,\; x^2+y^2+z^2 \leq 2\right\} \quad .$$

(a) Calcolare il volume di V .

(b) Calcolare l'area della superficie Σ costituita dal bordo di V .

3. Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $\mathbf{F}(x,y) = (x^3y\,,\, 2xy)$.

(a) Calcolare la divergenza del rotore di $\mathbf{F}$.

(b) Posto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \max(1,|x|)\,,\, x^2+y^2 \leq 8\}$ calcolare

$$\oint_{\partial E^+} \mathbf{F} \cdot ds \quad .$$