Soluzioni compito 15.07.19

Esercizio 1

a) Poiché $f(x,0,0) = x + \log(x^2)$ $(x \neq 0)$

e $f(1,0,z) = 1 + z - \log(1+z^2)$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0,0) = +\infty$$

$$\lim_{z\to-\infty} f(1,0,z) = -\infty .$$

Pertanto

$$\sup_A f = +\infty \qquad \inf_A f = -\infty$$

b) La funzione f è di classe C^2 in A. Le sue derivate parziali prime sono

$$D_1 f(x,y,z) = 1 + \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$D_2 f(x,y,z) = 1 + \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$D_3 f(x,y,z) = 1 - \frac{2z}{1+z^2}$$

I punti stazionari di f sono quelli le cui coordinate verificano il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x = 0 \\ x^2+y^2+2y = 0 \\ z^2-2z+1 = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x=y \\ 2x^2+2x=0 \\ (z-1)^2=0 \end{cases}$$

cioè $z=1$, $x=y=-1$, poiché la terna $(0,0,z) \notin A \quad \forall z \in \mathbb{R}$

Quindi $(-1,-1,1)$ è l'unico punto stazionario.

Si ha poi

$$D_{11} f(x,y,z) = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_{22} f(x,y,z) = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_{33} f(x,y,z) = \frac{2(z^2-1)}{(1+z^2)^2}$$

$$D_{12} f(x,y,z) = D_{21} f(x,y,z) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_{13} f(x,y,z) = D_{31} f(x,y,z) = D_{23} f(x,y,z) = D_{32} f(x,y,z) = 0.$$

La matrice hessiana nel punto $(-1,-1,1)$ è dunque

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Poiché A è aperto l'unico punto di massimo o di minimo locale potrebbe essere, per il punto b, $(-1,-1,1)$. La relativa matrice hessiana ha polinomio caratteristico

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda^3 = -\lambda(\lambda^2-1)$$

le cui radici $\lambda = 0, 1, -1$, autovalori della matrice stessa, di cui 2 di segno discorde, assicurano che $(-1,-1,1)$ è un punto di sella. Cioè: né di massimo né di minimo.

d) Osserviamo anzitutto che B è chiuso e limitat

— cioè compatto — e f continua. Per il teorema di Weierstrass esistono il massimo ed il minimo di f vincolati a B. Inoltre

$$(x,y,z)\in B \implies f(x,y,z) = x+y+z$$

da cui segue

$$\max_B f = \max_B (x+y+z)$$

$$\min_B f = \min_B (x+y+z).$$

Se i punti di massimo o di minimo non appartengono a ∂B, annullano il gradiente della Lagrangiana di f relativa a B. Cioè, posto

$$\mathcal{L}_B(f) = x+y+z-\lambda(x^2+y^2-z^2-1)$$

si deve avere $\nabla\mathcal{L}_B(f) = (0,0,0,0)$

e quindi

$$\begin{cases} 1-2\lambda x = 0 \\ 1-2\lambda y = 0 \\ 1+2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2-z^2 = 1 \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x = y \\ x = -z \\ x^2 = 1 \\ \lambda = 1/2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ z = \mp 1 \\ \lambda = \pm 1/2 \end{cases}$$

Otteniamo pertanto i due punti stazionari (per il vincolo B) $(1,1,-1)$ e $(-1,-1,1)$ per i quali $f(x,y,z) = 1$ e $f(x,y,z) = -1$ rispettivamente.

Il bordo di B è dato dall'unione delle due circonferenze $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

che parametrizziamo in modo standard

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = \pm\sqrt{3} \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

ottenendo che

$$(x,y,z) \in \partial B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x(\theta), y(\theta), z) = 2(\cos\theta + \sin\theta) + \begin{cases} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{cases}.$$

In entrambi i casi

$$f'(x(\theta), y(\theta), \pm\sqrt{3}) = 2(\cos\theta - \sin\theta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \pi/4 \quad o \quad \theta = 5\pi/4$$

da cui $x = y = \sqrt{2}$ oppure $x = y = -\sqrt{2}$

ed infine

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pm\sqrt{3}) = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{3}, \quad f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}) = -2\sqrt{2} \pm \sqrt{3}.$$

Tenendo conto dei valori 1 e −1 trovati in precedenza, se ne deduce che

$$\max_B f = 2\sqrt{2} + \sqrt{3} \qquad \min_B f = -2\sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Esercizio 2

a) La curva nel piano x, z di equazione $x+z=3$ $(z \in [0,2])$ è grafico della funzione $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ definita da $f(z) = 3 - z$.

Pertanto la superficie Σ, ottenuta dalla sua rotazione entorno all'asse z, si parametrizza come segue

$$\underline{r}: \begin{cases} x(u,\theta) = (3-u)\cos\theta \\ y(u,\theta) = (3-u)\sin\theta \\ z(u,\theta) = u \end{cases} \quad \text{con } (u,\theta)\in[0,2]\times[0,2\pi].$$

$\underline{r}$ è evidentemente di classe C^1 e la sua matrice jacobiana é

$$J_{\underline{r}}(u,\theta) = \begin{pmatrix} -\cos\theta & (u-3)\sin\theta \\ -\sin\theta & (3-u)\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne $\underline{r}_u$ e $\underline{r}_\theta$ sono linearmente indipendenti, in quanto

$$\|\underline{r}_u \times \underline{r}_\theta\|^2 = (3-u)^2\sin^2\theta + (3-u)^2\cos^2\theta + (3-u)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 = 2(3-u)^2 > 0 \quad \text{se } u\in[0,2].$$

$J_{\underline{r}}(u,\theta)$ ha pertanto rango 2 quando $(u,\theta)\in[0,2]\times[0,2\pi]$.
Σ è quindi regolare.

b) Dal punto a) segue che

$$\int_\Sigma (x^2+y^2)\,dS = \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (x^2(u,\theta)+y^2(u,\theta))\|\underline{r}_u\times\underline{r}_\theta\|\,du\,d\theta =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (3-u)^3\,du = -2\pi\sqrt{2}\left[\frac{(3-u)^4}{4}\right]_0^2 = 40\pi\sqrt{2}.$$

Esercizio 3

a) Com'è noto, nel piano x,y la curva che ha per sostegno γ_1 si parametrizza nel seguente modo

$$\underline{r}: \begin{cases} x(\theta) = \theta\cos\theta \\ y(\theta) = \theta\sin\theta \end{cases} \quad \text{con } \theta\in[0,2\pi]$$

$\underline{r}$ è di classe C^1 ed è regolare poiché

$$\underline{r}': \begin{cases} x'(\theta) = \cos\theta - \theta\sin\theta \\ y'(\theta) = \sin\theta + \theta\cos\theta \end{cases}$$

non si annulla mai, essendo

$$\|\underline{r}'(\theta)\|^2 = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(1+\theta^2) = 1+\theta^2 > 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

γ_2 è invece un segmento i cui estremi coincidono con quelli di γ_1, può essere parametrizzato come segue

$$\underline{r}^*: \begin{cases} x(t) = 2\pi - t \\ y(t) = 0 \end{cases} \qquad \text{se } t \in [0, 2\pi]$$

ed è ovviamente regolare.

Dunque $\gamma_1 \cup \gamma_2$ è chiusa e regolare tranne nei punti di $\gamma_1 \cap \gamma_2$ $((0,0), (2\pi, 0))$; ovvero regolare a tratti.

b) L'area della regione D può essere calcolata usando le formule di Gauss-Green, oppure anche osservando che, se $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è definita da

$$\Phi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

allora $D = \Phi(D^*)$ dove

$$D^* = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \rho \leq \theta\}$$

è un insieme ρ-semplice nel piano ρ, θ.

Per il teorema del cambiamento di variabile negli integrali doppi, si ha allora

$$\iint_D dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\theta} \rho\, d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{(2\pi)^3}{6} = \frac{4}{3}\pi^3.$$

c) Per il punto a)

$$\|\underline{z}'(\theta)\| = \sqrt{1+\theta^2} \quad \text{e} \quad \|\underline{z}^{*\prime}(t)\| = 1$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(s)\, ds = \int_{\gamma_1} f(s)\, ds + \int_{\gamma_2} f(s)\, ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\theta \cos\theta}{\sqrt{1+\theta^2\cos^2\theta+\theta^2\sin^2\theta}} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - t}{\sqrt{1+(2\pi-t)^2}}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \theta\cos\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\, du = \Big[\theta\sin\theta\Big]_0^{2\pi} +$$

$$- \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta + \Big[\sqrt{1+u^2}\Big]_0^{2\pi} = \sqrt{1+4\pi^2} - 1$$

$\square$