Soluzioni compito 27.01.20

Esercizio 1

a) Dalla definizione di valore assoluto segue

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

dove

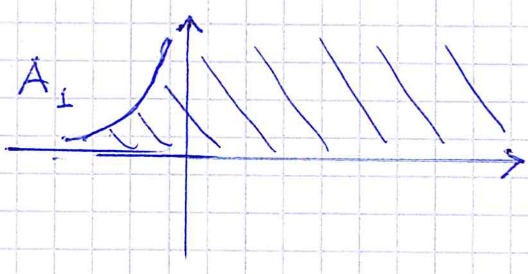
$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0,\ xy > -1\}$$

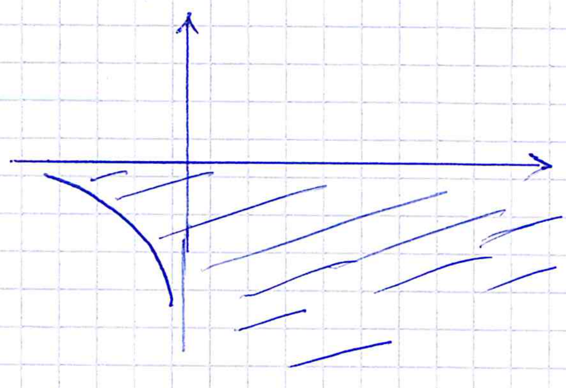
$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0,\ xy < 1\}$$

$$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}.$$

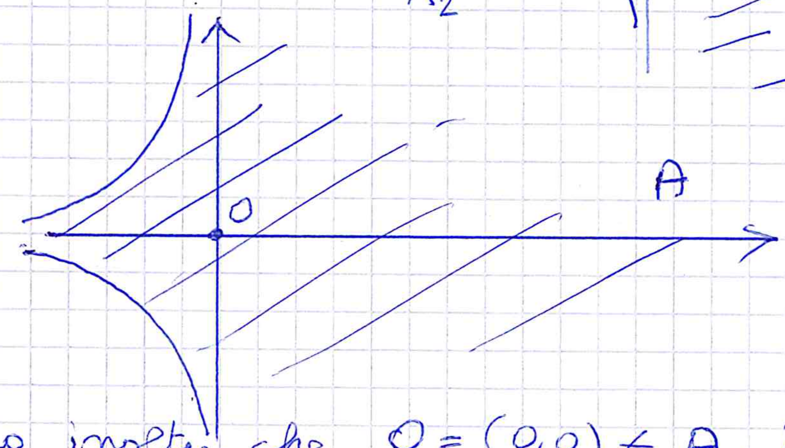
Poiché poi $\begin{cases} xy = -1 \\ y > 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} xy = 1 \\ y < 0 \end{cases}$

sono rami di iperbole equilatera rispettivamente del secondo e del terzo quadrante, si ha





da cui



Osserviamo inoltre che $O = (0,0) \in A$. Passando quindi a coordinate polari ed utilizzando la formula di Taylor per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$ in $t = 0$, abbiamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\log(1+\rho^2\cos\theta|\sin\theta|)}{\rho} =$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^{\cancel{2}}\cos\theta|\sin\theta|+o(\rho^2)}{\cancel{\rho}} = 0$$

qualsiasi sia $\theta\in[0,2\pi[$.

b) Con le notazioni del punto a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \log(1+yx) & \text{se } (x,y)\in A_1 \\ \log(1-yx) & \text{se } (x,y)\in A_2 \\ 0 & \text{se } (x,y)\in A_3 \end{cases}.$$

Pertanto

$$D_1 f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{1+yx} & \text{se } (x,y)\in A_1 \\ -\dfrac{y}{1-yx} & \text{se } (x,y)\in A_2 \\ 0 & \text{se } (x,y)\in A_3 \end{cases}$$

$$D_2 f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+yx} & \text{se } (x,y)\in A_1 \\ -\dfrac{x}{1-yx} & \text{se } (x,y)\in A_2 \end{cases}$$

Se infine $(x,y)\in A_3$ si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0,h)-f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\log(1+hx_0)}{h} = x_0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0,h)-f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\log(1-hx_0)}{h} = -x_0 .$$

da cui

Dunque $D_2 f(x,0)$ esiste se e solo se $x=0$ e si ha
$$D_2 f(0,0) = 0.$$

c) Poiché in $O=(0,0)$ esistono entrambe le derivate parziali prime, f è differenziabile in O se
$$f(h_1,h_2) - f(0,0) - D_1 f(0,0)\,h_1 - D_2 f(0,0)\,h_2 = o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right).$$
Per quanto già visto nel punto b), ciò significa che deve essere
$$\log(1+h_1|h_2|) = o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$
ovvero
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\log(1+h_1|h_2|)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$
così come dimostrato nel punto a).

d) La funzione f è di classe C^2 nei punti $(x,y) \in A_1 \cup A_2$. Il polinomio di Taylor nel punto $P=(0,1) \in A_1$ è
$$p_{(0,1)}(x,y) = f(0,1) + D_1 f(0,1)\,x + D_2 f(0,1)(y-1) + D_{11} f(0,1)\frac{x^2}{2} + D_{12} f(0,1)\,x(y-1) + D_{22} f(0,1)\frac{(y-1)^2}{2}.$$
Dal punto b) sappiamo che, se $(x,y) \in A_1$
$$D_1 f(x,y) = \frac{y}{1+yx}, \quad D_2 f(x,y) = \frac{x}{1+yx}$$

$$D_{11} f(x,y) = -\frac{y^2}{(1+yx)^2}, \quad D_{22} f(x,y) = -\frac{x^2}{(1+yx)^2}$$

$$D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y) = \frac{1}{(1+yx)^2}.$$

Quindi $\quad f(0,1) = 0, \quad D_1 f(0,1) = 1, \quad D_2 f(0,1) = 0$

$$D_{11} f(0,1) = -1, \quad D_{22} f(0,1) = 0, \quad D_{12} f(0,1) = 1.$$

Se ne conclude che

$$P_{(0,1)}(x,y) = x - \frac{x^2}{2} + x(x-1) = xy - \frac{x^2}{2}.$$

Esercizio 2

a) Poiché l'intersezione del paraboloide $z = x^2+y^2$ e della sfera $x^2+y^2+z^2 = 2$, data dal sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2 \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

è la circonferenza posta sul piano $z = 1$ di centro sull'asse z e raggio 1, osserviamo che il solido V può essere descritto come segue

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1, \; x^2+y^2 \le z \le \sqrt{2-(x^2+y^2)} \right\}$$

Detto allora C il cerchio

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1 \right\}$$

il volume di V può essere calcolato integrando „per fili".

Cioè

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_C dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-(x^2+y^2)}} dz =$$

$$= \iint_C \left(\sqrt{2-(x^2+y^2)} - x^2-y^2\right) dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2\right)\rho\, d\rho =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2-t}\, dt - \int_0^1 \rho^3 d\rho\right) = 2\pi\left(-\frac{1}{3}\left[(2-t)^{3/2}\right]_0^1 - \frac{1}{4}\left[\rho^4\right]_0^1\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \pi\left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{7}{6}\right).$$

b) Per quanto osservato nel punto a) ∂V è unione del paraboloide $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2,\ z \leq 1\}$ troncato e della calotta sferica $\Sigma_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 2,\ z \geq 1\}$.

Poiché l'intersezione di Σ_c con il piano $x=0$ è l'arco

$$\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 = 2,\ x=0,\ z \geq 1\} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2+z^2 = 2,\ z \geq |y|\}$$

i punti di Σ_c sono tutti e soli quelli della superficie sferica di colatitudine φ compresa tra 0 e $\pi/4$.

Parametrizziamo allora Σ e Σ_c come segue

$$\Sigma : \begin{cases} \underline{r} : C \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{r}(u,v) = (u, v, u^2+v^2) \end{cases}$$

$$\Sigma_c : \begin{cases} \underline{r}^c : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad D = [0,\pi/4] \times [0, 2\pi] \\ \underline{r}^c(\varphi,\theta) = (\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta, \sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta, \sqrt{2}\cos\varphi). \end{cases}$$

I rispettivi Jacobiani sono

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} \qquad J_C = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta & \sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta \\ \sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta & \sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta \\ -\sqrt{2}\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$dS = \sqrt{1+4(u^2+v^2)} \quad e \quad dS^{(C)} = 2\sin\varphi \, .$$

Ne segue; passando a coordinate polari

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_C \sqrt{1+4(u^2+v^2)}\, du\, dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho =$$

$$= \pi \int_0^1 \sqrt{1+4t}\, dt = \frac{\pi}{6}\left[(1+t)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

mentre

$$\mathcal{A}(\Sigma_c) = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin\varphi\, d\varphi = 4\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \pi\left(4-2\sqrt{2}\right)$$

Pertanto

$$\mathcal{A}(\partial V) = \mathcal{A}(\Sigma) + \mathcal{A}(\Sigma_c) = \pi\left(\frac{23+5\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{2}\right)$$

Esercizio 3

a) È noto dalla teoria che per un campo $\underline{F}$ di classe C^2 vale la relazione

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{F} = 0$$

ma nel caso di un campo bidimensionale la verifica diretta è assai semplice. Infatti

$$\text{rot } \underline{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

da cui $\quad \text{div rot } \underline{F} = \dfrac{\partial F_2}{\partial z \partial x}(x,y) - \dfrac{\partial F_1}{\partial z \partial y}(x,y) = 0.$

In particolare, se $\underline{F} = (x^3 y, 2xy)$, si ha

$\text{rot } \underline{F} = (0, 0, 2y - x^3)$ e $\text{div rot } \underline{F} = \dfrac{\partial}{\partial z}(2y - x^3) = 0$

b) L'insieme E è y-semplice con bordo regolare a tratti ed il campo $\underline{F}$ è di classe C^1. Per il teorema di Gauss-Green si ha dunque

$$\oint_{\partial E^+} \underline{F} \cdot ds = \iint_E \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_E (2y - x^2)\, dx\,dy$$

per il punto a). Osserviamo poiché E è simmetrico rispetto all'asse y e pertanto

$$\iint_E x^3 \, dx\,dy = 0$$

essendo x una funzione dispari. Poniamo inoltre

$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ dove $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2,\ x \le y \le \sqrt{8 - x^2}\}$

$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1,\ 1 \le y \le \sqrt{8 - x^2}\}$, $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le -1,\ -x \le y \le \sqrt{8 - x^2}\}$

Per motivi di simmetria si ha allora

$$\iint_E 2y \, dx\,dy = 4\iint_{E_1} y \, dx\,dy + 2\iint_{E_2} y \, dx\,dy$$

D'altra parte E_1, E_2 sono insiemi y-semplici. Quindi

$$\iint_{E_1} y\,dx\,dy = \int_1^2 dx \int_x^{\sqrt{8-x^2}} y\,dy = \int_1^2 \left(\frac{8-x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx =$$

$$= \left[4x\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 4 - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}$$

mentre

$$\iint_{E_2} y\,dx\,dy = \int_{-1}^1 dx \int_1^{\sqrt{8-x^2}} y\,dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{8-x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{7x}{2}\right]_{-1}^1 - \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^1 = 7 - \frac{1}{3} = \frac{20}{3}.$$

Pertanto

$$\iint_E 2y\,dx\,dy = 4 \cdot \frac{5}{3} + 2 \cdot \frac{20}{3} = 20$$

da cui

$$\oint_{\partial E^+} \underline{F} \cdot ds = \iint_E (2y - x^3)\,dx\,dy = \iint_E 2y\,dx\,dy = 20.$$

$\square$