Lezione 9

Tasso d'interesse: proprietà indipendenti dal modello

$B(\tau,T)$ $\qquad \dfrac{1}{B(\tau,T)} = 1 + L(\tau,T)(T-\tau)$

$$\boxed{L(\tau,T) = \frac{1-B(\tau,T)}{B(\tau,T)(T-\tau)}}$$

forward rate $\quad f(\tau,T) = -\dfrac{\partial}{\partial T}\log B(\tau,T)$

$$B(\tau,T) = e^{-\int_\tau^T f(\tau,u)\,du}$$

$r(\tau) = f(\tau,\tau) = \lim_{\Delta T \to 0^+} L(\tau,\tau+\Delta T)$ $\qquad$ short rate

---

titoli derivati: cap, floor, swap

cap, floor $\to$ opzioni; swap $\to$ contratto costo 0

cap — somma di caplet

$$(T_i - T_{i-1})\left(L(T_{i-1},T_i) - R\right)^+$$

$\delta = T_i - T_{i-1}$ $\qquad L \qquad B$

$$\delta(L-R)^+ = \delta\left(\frac{1-B}{B\delta} - R\right)^+ = \left(\frac{1}{B} - (1+\delta R)\right)^+ =$$

$$= \frac{1}{B}\left(1 - R^* B\right)^+ \qquad R^* = (1+\delta R)$$

$\to$ al tempo T_i

$$\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}\left(1 - R^* B(T_{i-1},T_i)\right)^+ \quad \text{al tempo } T_i$$

$$\left(1 - R^* B(T_{i-1},T_i)\right)^+ = R^*\left(\frac{1}{R^*} - B(T_{i-1},T_i)\right)^+$$

al tempo T_{i-1}

opzione put al tempo T_{i-1} su un bond di scadenza T_i

$$R^*\left(B(T_{i-1},T_i) - \frac{1}{R^*}\right)^+$$

---

swap

$$\delta(L-R) = \frac{1}{B}\left(1 - R^* B\right) \quad \text{al tempo } T_i$$

$$\left(1 - R^* B(T_{i-1},T_i)\right) \quad \text{al tempo } T_{i-1}$$

$$\left(B(0,T_{i-1}) - R^* B(0,T_i)\right) \quad \text{al tempo } 0$$

$0 \longrightarrow T_i = T_0 + i\delta$ $\qquad$ flusso totale in 0

$$\sum_{i=1}^n B(0,T_{i-1}) - (1+\delta R)\sum_{i=1}^n B(0,T_i) = 0$$

$$\boxed{R = \frac{B(0,T_0) - B(0,T_n)}{\delta\sum_{i=1}^n B(0,T_i)}}$$ solo teoricamente

---

Principi di modellizzazione

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\quad (\mathcal{F}_\tau)_{0\le\tau\le T^*}$ $\qquad (W_\tau)_{0\le\tau\le T^*}$ d-dimens.

$\mathcal{F}_\tau \supseteq \mathcal{F}^W_\tau$ $\qquad$ numerario "money account"

$B_\tau = e^{\int_0^\tau r(s)\,ds}$ $\leftarrow$ è un attivo "virtuale"

$0 < T_1 < T_2 < \quad\ldots\quad < T_n = T^*$

$$\frac{1}{B(0,T_1)}\cdot\frac{1}{B(T_1,T_2)}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{B(T_{n-1},T_n)} =$$

$$= \exp\left(\int_0^{T_1} f(0,u)\,du + \int_{T_1}^{T_2} f(T_1,u)\,du + \cdots + \int_{T_{n-1}}^{T_n} f(T_{n-1},u)\,du\right)$$

$$\downarrow$$

$$\exp\left(\int_0^{T^*} f(u,u)\,du\right) = e^{\int_0^{T^*} r(u)\,du} = B_{T^*}$$

Principio di modellizzazione: $\exists P^* \sim P$

$\forall T,$ $\qquad \left.\dfrac{B(\tau,T)}{B_\tau}\right|_{0\le\tau\le T}$ è una martingala.

Prime idee

$$dB(\tau,T) = B(\tau,T)\left(m(\tau,T)\,d\tau + \sigma(\tau,T)\,dW_\tau\right)$$

cattive idee! $\qquad B(\omega,T,T) = 1$

ω,τ fissati $\quad T \mapsto B(\omega,\tau,T)$ di classe C^1

- modelli basati sullo short rate
- " " sul forward rate

(modelli di market)

* modellizzare r sotto una prob. P

$$\begin{cases} dr(\tau) = \mu(\tau,r)\,d\tau + \sigma(\tau,r)\,dW_\tau \\ r(0) = r^*(0) \end{cases}$$

e si modellizza $\dfrac{dP^*}{dP}$

** si modellizza (sotto P)

$$\begin{cases} df(\tau,T) = \alpha(\tau,T)\,d\tau + \sigma(\tau,T)\,dW_\tau \\ f(0,T) = f^*(0,T) \end{cases}$$

$\to$ d-dimensionale

in modo tale che esiste $P^* \sim P$ con

$\left.\dfrac{B(\tau,T)}{B_\tau}\right|_{0\le\tau\le T}$ martingala. Heath Jarrow Merton

---

Tasso a breve

equazione di $r(\tau)$ sotto P^*

$$\frac{B(\tau,T)}{B_\tau} = E^*\left[\frac{\overbrace{B(T,T)}^{=1}}{B_T}\,\Big|\,\mathcal{F}_\tau\right]$$

$$\boxed{B(\tau,T) = E^*\left[e^{-\int_\tau^T r(s)\,ds}\,\Big|\,\mathcal{F}_\tau\right]}$$

$$\boxed{\begin{cases} dr(\tau) = \mu(\tau,r)\,d\tau + \sigma(\tau,r)\,dW_\tau \\ r(0) = r^*(0) \end{cases}}$$

$\to$ Wiener multidim.

$$aW^1_\tau + bW^2_\tau = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}W^1_\tau + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}W^2_\tau\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\;\tilde{W}_\tau$$

$$H^1_\tau\,dW^1_\tau + H^2_\tau\,dW^2_\tau = \sqrt{(H^1_\tau)^2 + (H^2_\tau)^2}\;d\tilde{W}_\tau$$

$$\tilde{W}_\tau = \left(\int_0^\tau \frac{H^1_s}{\sqrt{}}\,dW^1_s + \int_0^\tau \frac{H^2_s}{\sqrt{\cdots}}\,dW^2_s\right)$$

$\to$ processo di Wiener

Teorema di Paul Lévy

$(d\tilde{W}_\tau)^2 = d\tau$

$(M_\tau)_{0\le\tau\le T}$ mart. a traiettorie continue

con $[M]_\tau = \tau$ $\left(\text{cioè } (dM_\tau)^2 = d\tau\right)$, allora

M_τ è un processo di Wiener (moto Browniano)

Vasicek $\quad dr = \boxed{(b - ar)}\,d\tau + \sigma\,dW_\tau$ $\qquad a,b>0$

C.I.R. $\quad dr = a(b-r)\,d\tau + \sigma\sqrt{r}\,dW_\tau$ $\qquad \boxed{ab \ge \frac{\sigma^2}{2}}$

Hull-White $\quad dr = (\vartheta(\tau) - ar)\,d\tau + \sigma\,dW_\tau$

$f' = a(m-f)$ $\quad f(0) = c$ $\qquad a>0$

$f(\tau) = m + (c-m)e^{-a\tau} \rightsquigarrow m$

$dX_\tau = a(m - X_\tau)\,d\tau + b\,dW_\tau$

$X_0 = x_0 > 0$

$$X_\tau = m + (x_0 - m)e^{-a\tau} + b\int_0^\tau e^{-a(\tau-s)}\,dW_s$$

$$e^{-a\tau}\cdot\int_0^\tau e^{as}\,dW_s$$

mean-reversion