Lezione 7: Cambio di numerario

Mercato $S^0_t, S^1_t, \dots, S^d_t$ $\qquad S^0_t = e^{rt}$

$S^i_t \to$ processo di Itô

Definizione Numerario $(D_t)_{0 \le t \le T}$

* adattato
* a valori strett. positivi

$$V_t = \sum_{i=0}^d H^i_t S^i_t$$

Proposizione Supponiamo D_t processo di Itô

$$dV_t = \sum_{i=0}^d H^i_t dS^i_t \iff d\left(\frac{V_t}{D_t}\right) = \sum_{i=0}^d H^i_t \, d\left(\frac{S^i_t}{D_t}\right)$$

$$d\left(\frac{V_t}{D_t}\right) = \frac{1}{D_t} dV_t + V_t \, d\left(\frac{1}{D_t}\right) + d\left[V, \frac{1}{D}\right]_t =$$

$$= \frac{1}{D_t} \sum_{i=0}^d H^i_t dS^i_t + \sum_{i=0}^d H^i_t S^i_t \, d\left(\frac{1}{D_t}\right) + \sum_{i=0}^d H^i_t \, d\left[S^i, \frac{1}{D}\right]_t =$$

$$= \sum_{i=0}^d H^i_t \, d\left(\frac{S^i}{D}\right)_t$$

Teorema Supponiamo che esista P^* tale che $\left(\frac{S^i_t}{S^0_t}\right)$ sia una martingala, supponiamo anche che $\left(\frac{D_t}{S^0_t}\right)$ sia una martingala: presa la probab. P^D con $\frac{dP^D}{dP^*} = \frac{D_T}{S^0_T D_0}$, sotto P^D ogni $\left(\frac{S^i_t}{D_t}\right)$ è una martingala. $\qquad \mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$

$$E^*\left[\frac{D_T}{S^0_T \cdot D_0}\right] = \frac{1}{D_0} E^*\left[\frac{D_0}{S^0_0}\right] = 1$$

$$\left.\frac{dP^D}{dP^*}\right|_{\mathcal{F}_t} = E^*\left[\frac{D_T}{S^0_T \cdot D_0} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right] = \frac{D_t}{S^0_t \cdot D_0}$$

Esercizio $\quad L_T = \frac{dQ}{dP} \qquad L_t = \left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = E[L_T \mid \mathcal{F}_t]$

$(M_t)_{t \ge 0}$ è una Q-mart. $\iff$ $(M_t L_t)$ è una P-mart.

$$E^Q[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \frac{E^P[M_t L_t \mid \mathcal{F}_s]}{E^P[L_t \mid \mathcal{F}_s]} = \frac{M_s L_s}{L_s} = M_s$$

$\left(\frac{S^i_t}{D_t}\right)$ P^D mart. $\qquad \frac{S^i_t}{D_t} \cdot \frac{D_t}{S^0_t \cdot D_0} = \frac{1}{D_0} \cdot \left(\frac{S^i_t}{S^0_t}\right)$ P^*-mart.

se $\left(\frac{X_t}{S^0_t}\right)$ è una P^*-mart $\Rightarrow$ $\left(\frac{X_t}{D_t}\right)$ è una P^D-mart.

V_t val. port. replicante per X

$$V_t = e^{rt} E^*\left[\frac{X}{e^{rT}} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right] = D_t E^D\left[\frac{X}{D_T} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$$

π_t "prezzo di non arbitraggio" $\qquad \pi_t = D_t E^D\left[\frac{X}{D_T} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$

Conto preliminare

$$dS_t = S_t (K_t \, dt + H_t \, dW_t) \qquad d\left(\frac{1}{S_t}\right)?$$

$$\frac{1}{S_t} = \frac{1}{S_0} \exp\left(-\int_0^t H_s \, dW_s + \int_0^t \left(-K_s + H_s^2 - \frac{H_s^2}{2}\right) ds\right)$$

$-W_t$ proc. di Wiener $\tilde{W}_t$

$$d\left(\frac{1}{S_t}\right) = \left(\frac{1}{S_t}\right)\left((-K_t + H_t^2)\, dt + H_t \, d\tilde{W}_t\right)$$

(Falso) paradosso di Siegel sul tasso di cambio

$B_t = e^{rt} \qquad B^f_t = e^{r_f t} \qquad R_t \leftarrow$ tasso di cambio

$$dR_t = R_t(\mu \, dt + \sigma \, dW_t)$$

$\left(\frac{B^f_t R_t}{B_t}\right)$ è una mart. sotto P^*

$\frac{R_t}{e^{(r-r_f)t}}$ P^*-mart. $\qquad dR_t = R_t\left((r - r_f)\, dt + \sigma \, dW^*_t\right)$

$$d\left(\frac{1}{R_t}\right) = \left(\frac{1}{R_t}\right)\left((r_f - r + \sigma^2)\, dt - \sigma \, dW^*_t\right)$$

Bisogna guardare $\left(\frac{1}{R_t}\right)$ col numerario B^f_t

sotto P^* $\left(1, \frac{R_t B^f_t}{B_t}\right)$ è una P^*-mart.

sotto prob. P^f (cioè col numerario $R_t B^f_t$)

$\left(\frac{B_t}{B^f_t R_t}, 1\right)$ sono mart.

$\left(\frac{1}{R_t}\right) \cdot \frac{1}{e^{(r_f - r)t}}$ mart. $\qquad d\left(\frac{1}{R_t}\right) = \frac{1}{R_t}\left((r_f - r)\, dt + \sigma \, dW^f_t\right)$

Formule Black-Scholes rivisitate.

$A = \{S_T > K\}$

$$C(0, S_0) = E^*\left[\frac{(S_T - K)^+}{e^{rT}}\right] =$$

$$= E^*\left[\frac{S_T}{e^{rT}}\right] - K e^{-rT} P^*(A)$$

sotto P^* $\quad S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T} \cdot Z\right)$ $\quad \hookrightarrow Z \sim N(0,1)$

in legge

$$S_T > K \iff -Z < \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \to d_2$$

secondo termine $\quad -K e^{-rT} \phi(d_2)$

passare al numerario S_t

$$E^*\left[\frac{S_T}{e^{rT}} \cdot I_A\right] = S_0 E^S[I_A] = S_0 P^S(A)$$

$dS_t = S_t(\,?\, dt + \sigma \, dW^S_t)$ sotto P^S ?

col numerario e^{rt} $\quad \left(1, \frac{S_t}{e^{rt}}\right)$ - mart.

col numerario S $\quad \left(\frac{e^{rt}}{S_t}, 1\right)$ sono mart.

$$d\left(\frac{1}{S_t}\right) = \left(\frac{1}{S_t}\right)\left((-r\, dt) + \sigma \, dW^S_t\right)$$

$$dS_t = S_t\left((r + \sigma^2)\, dt - \sigma \, dW^S_t\right)$$

$\to$ stessa formula di prima con $(r + \sigma^2)$ al posto di r

$S_0 \phi(d_1) \leftarrow$ prima parte formula...

Esempio 3 Opzione di scambio tra due attivi

$S^0_t = e^{rt} \qquad dS^i_t = S^i_t(\mu_i \, dt + \sigma_i \, dW^i_t) \qquad i = 1, 2$

W^1, W^2 indip. $\qquad$ mercato completo

ogni attivo X è replicabile con un port. $V_t =$
$= H^0_t e^{rt} + H^1_t S^1_t + H^2_t S^2_t \dots$

$V_t = e^{rt} E^*\left[\frac{X}{e^{rT}} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$ $\qquad$ sotto P^*, $dS^i_t = S^i_t(r\, dt + \sigma \, dW^i_t)$

$$X = (S^1_T - S^2_T)^+$$

sotto P^* $\left(1, \frac{S^1_t}{e^{rt}}, \frac{S^2_t}{e^{rt}}\right)$ sono mart.

$$V_t = e^{rt} E^*\left[\frac{(S^1_T - S^2_T)^+}{e^{rT}} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$$

numerario S^1_t —— $\left(\frac{e^{rt}}{S^1_t}, 1, \frac{S^2_t}{S^1_t}\right)$ sono P^1 mart.

$$V_t = S^1_t E^{S_1}\left[\left(1 - \frac{S^2_T}{S^1_T}\right)^+ \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$d\left(\frac{S^2_t}{S^1_t}\right) = \left(\frac{S^2_t}{S^1_t}\right)\left[\underbrace{\dots\, dt}_{0 \text{ sotto } P^{S_1}} + \sigma_2 \, dW^2_t - \sigma_1 \, dW^1_t\right]$$

$$\sigma_2 \, dW^2_t - \sigma_1 \, dW^1_t = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \; d\left(\frac{-\sigma_1}{\sqrt{}} W^1_t + \frac{\sigma_2}{\sqrt{}} W^2_t\right)$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \; d\tilde{W}_t$$

$\left(\frac{S^2_t}{S^1_t}\right)$ equaz. tipo B.S. con $r = 0$ e $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ al posto di σ.

$$S^1_t E^{S^1}\left[\left(1 - \frac{S^2_T}{S^1_T}\right) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right] =$$

$$= S^1_t \cdot P\left(t, \frac{S^2_t}{S^1_t}\right) \qquad P(t, x) = P(t, T, \overset{r=0}{0}, \overset{K=1}{1}, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

$X = (S^1_T - S^2_T)^+$ è replicabile con un port.

$$V_t = H^1_t S^1_t + H^2_t S^2_t$$

$$dV_t = H^1_t \, dS^1_t + H^2_t \, dS^2_t \Rightarrow d\left(\frac{V_t}{S^1_t}\right) = H^2_t \, d\left(\frac{S^2_t}{S^1_t}\right)$$

formula del "delta" del put in B.S.

H^1_t si ottiene dalla cond. di autofinanziamento.