Introduzione informale all'integrale stocastico secondo Ito.

Maurizio Pratelli

Agosto 2013

Queste pagine **non sono gli appunti di un breve corso sull'integrazione stocastica secondo Ito**, infatti non contengono quasi alcuna dimostrazione. Questa pagine forniscono una rapida introduzione destinata agli studenti che non abbiano già seguito un corso di integrazione stocastica e che incontrino questo argomento in altri corsi (ad esempio "Finanza Matematica", oppure un corso avanzato di Probabilità).

Solo per i risultati della Sezione 4 (che sono di fondamentale importanza ad esempio nel corso sopra citato) sono presenti dimostrazioni complete.

Ricordiamo che, a partire dall'anno accademico 2012-13, a Pisa l'argomento *"Integrazione stocastica secondo Ito"* viene illustrato approfonditamente nel corso *"Istituzioni di Probabilità"*.

L'ultima sezione contiene alcuni riferimenti bibliografici utili a chi desideri approfondire ulteriormente questo argomento.

1 Prime definizioni e costruzione dell'integrale.

Consideriamo assegnato, su uno spazio di probabilità $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\Big)$ un **processo di Wiener standard** (chiamato anche **moto browniano**) $\big(W_t\big)_{0\le t\le T}$ avente $[0,T]$ come insieme dei tempi, cioè un processo stocastico definito dalle proprietà:

- $W_0 = 0\,;$
- presi $0 \le t_1 < \ldots < t_n \le T$, le variabili aleatorie $\Big(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\Big)$ sono indipendenti;

- presi $s < t$, $\big(W_t - W_s\big)$ ha legge gaussiana $N\big(0\,,\, t-s\big)$;
- le **traiettorie** del processo (W_t) sono q.c. continue.

Ricordo che si chiama *traiettoria* del processo (in corrispondenza a ω) la funzione $t \to W(\omega, t)$.

Consideriamo ora su $\big(\Omega, \mathcal{F}\big)$ una **filtrazione**, cioè una famiglia $\big(\mathcal{F}_t\big)_{0\le t\le T}$ di σ-algebre contenute in $\mathcal{F}$, *crescente* nel senso che, se $s < t$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$. Si può evidentemente supporre che si abbia $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ e supporremo inoltre che questa filtrazione soddisfi le cosiddette *ipotesi abituali*, cioè

- è continua a destra, nel senso che si ha $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$;
- ogni $\mathcal{F}_t$ contiene tutti gli insiemi trascurabili di $\mathcal{F}_T$.

Queste ipotesi non sono indispensabili, ma semplificano alcune dimostrazioni, inoltre *non sono restrittive*: basta infatti sostituire $\mathcal{F}_t$ con $\mathcal{F}_{t+}$ e completare ogni $\mathcal{F}_t$ con gli insiemi trascurabili di $\mathcal{F}_T$.

Solitamente $\big(\mathcal{F}_t\big)_{0\le t\le T}$ è la *minima filtrazione* che rende $\big(W_t\big)$ *adattato* (cioè $\mathcal{F}_t$ è la σ-algebra generata dalle variabili $\big(W_s\big)$ con $s \le t$), ma potrebbe anche essere una filtrazione più grande, a patto che sia soddisfatta la condizione seguente: si dice che $\big(W_t\big)_{0\le t\le T}$ è un processo di Wiener rispetto alla filtrazione $\big(\mathcal{F}_t\big)_{0\le t\le T}$ se

- ogni W_t è $\mathcal{F}_t$ misurabile (cioè il processo stocastico è *adattato*);
- presi comunque $s < t$, $(W_t - W_s)$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$ (e di legge gaussiana $N(0, t-s)$).

Ricordiamo che si chiama **martingala** un processo stocastico $\big(X_t\big)_{0\le t\le T}$ tale che ogni X_t sia $\mathcal{F}_t$-misurabile ed integrabile e che, presi $s < t$, valga l'eguaglianza $X_s = \mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$.

Preso dunque un processo di Wiener $(W_t)_{0\le t\le T}$ rispetto alla filtrazione $\big(\mathcal{F}_t\big)_{0\le t\le T}$, si dimostrano facilmente le seguenti proprietà:

- $\big(W_t\big)_{t\ge 0}$ è una martingala;
- $\big(W_t^2 - t\big)_{t\ge 0}$ è una martingala.

Vediamo ad esempio la seconda di queste proprietà: presi $s<t$, tenendo conto del fatto che $(W_t - W_s)$ è indipendente fa $\mathcal{F}_s$ e di legge gaussiana $N\big(0\,,\, t-s\big)$, si ha:
$t - s \;=\; \mathbf{E}\big[\big(W_t - W_s\big)^2\big] \;=\; \mathbf{E}\big[\big(W_t - W_s\big)^2\big|\mathcal{F}_s\big] \;=\; \mathbf{E}\,[\,W_t^2|\mathcal{F}_s] + W_s^2 - 2\,W_s\,\mathbf{E}\,[\,W_t|\mathcal{F}_s] \;=\; \mathbf{E}\,[\,W_t^2|\mathcal{F}_s] - W_s^2$

e questa eguaglianza equivale alla proprietà voluta.

Un'altra proprietà del processo di Wiener, molto importante per l'integrazione stocastica, riguarda la cosiddetta **variazione quadratica** delle traiettorie: partiamo da questo risultato

Proposizione 1.1. *Fissato t, per quasi ogni ω vale l'eguaglianza*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1}\Big(W_{\frac{t\,(k+1)}{2^n}}-W_{\frac{t\,k}{2^n}}\Big)^2 = t$$

Dimostrazione. Riporto la facile dimostrazione, poichè si tratta di un risultato cruciale nell'integrazione stocastica, supponendo per semplicità di notazioni $t=1$.

Poniamo $S_n = \sum_{k=0}^{2^n-1}\Big(W_{\frac{k+1}{2^n}}-W_{\frac{k}{2^n}}\Big)^2$: è facile constatare che si ha $\mathbf{E}[S_n]=1$.

Inoltre si ha

$$\mathbf{E}\Big[\Big(W_{\frac{k+1}{2^n}}-W_{\frac{k}{2^n}}\Big)^2\Big(W_{\frac{h+1}{2^n}}-W_{\frac{h}{2^n}}\Big)^2\Big] = \begin{cases} 2^{-2n} & k\neq h \\ 3.2^{-2n} & k=h \end{cases}$$

Di conseguenza si ha $\mathbf{E}[S_n^2] = 3.2^{-n}+1-2^{-n} = 2.2^{-n}+1$, e quindi $\mathbf{E}\big[\big(S_n-1\big)^2\big] = 2^{-n+1}$, cioè S_n converge a 1 in L^2. Tuttavia si può dire di più: preso $\alpha_n^2 = 2^{-n/2}$, si ha

$$\mathbf{P}\big\{\big|S_n-1\big|>\alpha_n\big\}\leq\frac{2^{-(n-1)}}{\alpha_n^2}$$

ed il Lemma di Borel–Cantelli permette facilmente di concludere che la convergenza in realtà è quasi certa. □

In verità non è essenziale che le *suddivisioni* dell'intervallo $[0,t]$ siano *equispaziate*: sia π una suddivisione dell'intervallo $[0,t]$, cioè una famiglia finita di numeri $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ e chiamiamo *passo* della suddivisione il numero $\|\pi\| = \max_i|t_{i+1}-t_i|$. Modificando la dimostrazione precedente non è difficile provare che, presa una successione $(\pi_n)_{n\geq 1}$ di suddivisioni dell'intervallo $[0,t]$ contenute una nell'altra e tali che $\lim_{n\to\infty}\|\pi_n\|=0$, allora la successione delle somme

$$\sum_{t_i^n\in\pi_n}\Big(W_{t_{i+1}^n}-W_{t_i^n}\Big)^2$$

converge in probabilità a t.

La *variazione quadratica* di un processo stocastico, se esiste, è indicata $\langle X \rangle_t$: per il processo di Wiener si ha dunque $\langle W \rangle_t = t$.

Alcuni testi preferiscono alla notazione $\langle X \rangle_t$ la notazione $[X]_t$: in realtà $\langle X \rangle_t$ e $[X]_t$ sono diversi, *ma coincidono per processi stocastici con traiettorie continue.* Per questo motivo nell'integrale stocastico di Ito si può usare indifferentemente una o l'altra notazione.

Il risultato $\langle W \rangle_t = t$ si può enunciare *in forma differenziale* $\mathrm{d}\langle W \rangle_t = \mathrm{d}t$, si usa anche scrivere $(\mathrm{d}W_t)^2 = \mathrm{d}t$: è bene chiarire subito che questa ultima notazione, presa alla lettera, è assolutamente priva di senso, tuttavia è molto comoda come *regola mnemonica.*

Una conseguenza del risultato precedente è che le traiettorie del processo di Wiener *non possono essere funzioni a variazione finita*: è facile verificare infatti che una funzione continua a variazione finita ha variazione quadratica eguale a 0. Di conseguenza non si può definire un integrale della forma $\int_0^t H(\omega, s)\,\mathrm{d}W(\omega, s)$ fissando ω come un parametro ed integrando rispetto alla misura con segno generata dalla traiettoria $s \to W(\omega, s)$ (questa misura non esiste).

Osservazione 1.2 (Sulla variazione quadratica delle traiettorie del processo di Wiener). La proprietà delle traiettorie del processo di Wiener, e poi dei processi di Ito, di avere variazione quadratica nel senso precisato sopra è fondamentale nella costruzione dell'integrale stocastico e nella formula di Ito. Tuttavia, a rigor di termini, le traiettorie del processo di Wiener *hanno variazione quadratica infinita.*

Più precisamente, se si considera

$$\sup_{\pi} \sum_{t_i \in \pi} \Big(W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega) \Big)^2$$

dove il *sup* è preso su tutte le possibili suddivisioni π dell'intervallo $[0, T]$, questo è infinito quasi ovunque.

Questa proprietà, poco nota e molto sorprendente, è stata scoperta da Paul Lévy che non ne ha però fornito una dimostrazione del tutto rigorosa; la dimostrazione precisa è arrivata parecchi anni più tardi.

Arriviamo adesso alla costruzione dell'integrale stocastico: chiamiamo **processo elementare** un processo stocastico della forma

$$H(\omega, t) \;=\; \sum_{i=1}^{k-1} H_i(\omega)\, I_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$$

dove $0 \leq t_1 < t_2 \ldots < t_k \leq T$ ed H_i è $\mathcal{F}_{t_i}$ misurabile e limitata. Definiamo l'integrale stocastico per i processi elementari secondo le *somme di Riemann,* e cioè

- $I(H) = \int_0^T H_s \, \mathrm{d}W_s = \sum_{i=1}^{k-1} H_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$
- $I_t(H) = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}W_s = \sum_{i=1}^{j-1} H_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + H_j (W_t - W_{t_j})$ se $t_j \leq t < t_{j+1}$,

È noioso, ma facile verificare che il processo stocastico $I_t(H) = \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s$ così definito ha le seguenti proprietà:

- è una martingala con traiettorie continue;
- vale l'eguaglianza (detta anche *isometria di Ito*)

$$\mathbf{E}\Big[\Big(\int_0^t H_s \, \mathrm{d}W_s\Big)^2\Big] = \mathbf{E}\Big[\int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}s\Big]$$

- la variazione quadratica di $I_t(H)$ è eguale a $\int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}s$.

Verifichiamo, ad esempio, la *isometria di Ito* con $t = T$: il valore atteso del quadrato di $I(H)$ è somma di termini della forma $\mathbf{E}\big[H_i H_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\big]$. Se $i = j$, poichè $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ è indipendente da H_i , si ha

$$\mathbf{E}\big[H_i^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\big] = \mathbf{E}\big[H_i^2\big] \, \mathbf{E}\big[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\big] =$$

$$= \mathbf{E}\big[H_i^2\big] \, (t_{i+1} - t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{E}\big[H_t^2\big] \mathrm{d}t$$

Se $i < j$, poichè $(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$ è indipendente dagli altri termini, si ha

$$\mathbf{E}\Big[H_i H_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\Big] = \mathbf{E}\big[H_i H_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\big] \, \mathbf{E}\big[W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\big] = 0$$

e sommando i vari termini si ha il risultato voluto.

Si tratta ora di estendere l'operazione di integrale ad una classe più ampia di processi integrandi, e a questo scopo introduciamo alcune definizioni di misurabilità. Innanzi tutto un processo stocastico deve essere visto come una funzione $X : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ ed è detto

- **adattato** se, per ogni t fissata, $X_t = X(., t)$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile;
- **misurabile** se $X : \Omega \times [0, T]$ è misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, T]$;
- **progressivamente misurabile** se, per ogni t fissato, la restrizione di X a $\Omega \times [0, t]$ è misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}[0, t]$.

Un processo progressivamente misurabile è evidentemente misurabile e adattato, mentre è possibile trovare esempi (complicati) di processi misurabili adattati che non sono progressivamente misurabili. Dal punto di vista pratico queste differenze non sono rilevanti poichè un processo adattato con traiettorie regolari (ad es. continue a destra) è progressivamente misurabile (e negli esempi si incontreranno sempre processi adattati con traiettorie regolari), ma è importante stabilire definizioni precise.

Sia allora $\mathcal{M}^2 = \Big\{H \text{ progressivamente misurabili} \,\Big|\, \mathbf{E}\big[\int_0^T H_s^2 \mathrm{d}s\big] < +\infty\Big\}$, munito della norma $\|H\|_{\mathcal{M}^2} = \sqrt{\mathbf{E}\big[\int_0^T H_s^2 \mathrm{d}s\big]}$. È fondamentale il risultato seguente

Teorema 1.3. *I processi elementari sono densi in* $\mathcal{M}^2$ *.*

L'importanza di questo risultato è evidente, poichè permette di estendere per continuità l'integrale stocastico dai processi elementari alla classe $\mathcal{M}^2$; non riporto la dimostrazione completa ma accenno alle linee della verifica.

- ogni $H \in \mathcal{M}^2$ è limite di una successione di processi progressivamente misurabili e uniformemente limitati;
- ogni H progressivamente misurabile uniformemente limitato è limite in $\mathcal{M}^2$ di una successione di processi adattati con traiettorie continue (e uniformemente limitati) ;
- ogni H adattato con traiettorie continue è limite di una successione di processi elementari.

Di questi punti, solo il secondo è delicato e ne accenno una dimostrazione (scegliendo tra le diverse possibili). Sia $\rho(t)$ una funzione continua, a valori positivi, tale che $\rho(t) = 0$ per $|t| > 1$ e che $\int_{-1}^{+1} \rho(t)\,\mathrm{d}t = 1$; e definiamo come d'uso, per $\varepsilon > 0$ $\rho_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\rho\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)$.

Prendiamo H progressivamente misurabile tale che $|H(\omega, t)| \le C$ per ogni (ω, t) e definiamo $H^\varepsilon(\omega, t) = \int_{t-2\varepsilon}^{t} H(\omega, s)\rho_\varepsilon(t-s-\varepsilon)\mathrm{d}s$.

Sostanzialmente abbiamo fissato ω come parametro ed abbiamo effettuato l'usuale regolarizzazione rispetto a t, spostando però l'intervallo a sinistra di ε *in modo che* H^ε *risulti adattato*; è poi evidente che H^ε risulta *uniformemente limitata* dalla costante C e con traiettorie continue. È importante osservare che queste proprietà (soprattutto il fatto che H^ε sia adattato) sono conseguenza del fatto che H è *progressivamente misurabile.*

Esattamente come si dimostra con l'usuale regolarizzazione, fissato ω , $\int_0^T \big|H(\omega, t) - H^\varepsilon(\omega, t)\big|^2 \mathrm{d}t$ converge a 0 quando $\varepsilon \to 0$ e ne segue facilmente che $\lim_{\varepsilon\to 0} \|H - H^\varepsilon\|_{\mathcal{M}^2} = 0$.

A questo punto, presa $H \in \mathcal{M}^2$, risulta definito l'integrale stocastico di Ito $\int_0^t H_s \, \mathrm{d}W_s$ ed è facile provare che

- $\big(\int_0^t H_s \, \mathrm{d}W_s \big)_{t \geq 0}$ è una martingala di quadrato integrabile;
- vale l'isometria $\mathbf{E}\Big[\big(\int_0^T H_s \, \mathrm{d}W_s \big)^2 \Big] = \mathbf{E}\big[\int_0^T H_s^2 \, \mathrm{d}s \big]$.

Osserviamo che una conseguenza immediata dell'isometria di Ito è la formula seguente: presi $H,\ K \in \mathcal{M}^2$, si ha

$$\mathbf{E}\Big[\big(\int_0^T H_s \mathrm{d}W_s \big) . \big(\int_0^T K_s \mathrm{d}W_s \big) \Big] = \mathbf{E}\Big[\int_0^T H_s K_s \, \mathrm{d}s \Big] = \int_0^T \mathbf{E}\big[H_s K_s \big] \mathrm{d}s$$

Invece è un pò più delicato provare le due seguenti proprietà dell'integrale stocastico, valide per $H \in \mathcal{M}^2$:

- la martingala $\big(\int_0^t H_s \, \mathrm{d}W_s \big)$ ha *traiettorie continue*;
- la variazione quadratica della martingala sopra scritta (fino all'istante t) è data da $\int_0^t H^2(\omega, s) \, \mathrm{d}s$.

Entrambe sono una conseguenza della importante **diseguaglianza di Doob** che si può enunciare in questo modo: se $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ è una martingala (con traiettorie continue a destra), posto $M^*(\omega) = \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t(\omega)|$, si ha $\mathbf{E}\big[\big(M^* \big)^2 \big] \leq 4 \, \mathbf{E}\big[M_T^2 \big]$.

Di conseguenza, se una successione di martingale (M^n) è tale che $M_T^n \to M_T$ in L^2 , allora $\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t^n(\omega) - M_t(\omega)|$ converge a 0 in L^2 e, passando a una sottosuccessione, la convergenza diventa quasi certa: cioè per quasi ogni ω la traiettoria $t \to M^n(\omega, t)$ converge uniformemente alla traiettoria del limite $t \to M(\omega, t)$. È facile a questo punto provare che l'integrale stocastico di ogni $H \in \mathcal{M}^2$ (come limite di integrali di processi elementari) ha traiettorie continue.

Osservazione 1.4 (**Integrale dei processi misurabili e adattati).** Il libro di Karatzas-Shreve prova un risultato più forte del teorema 1.3, più precisamente prova che se H è misurabile adattato, esiste $\tilde{H}$ progressivamente misurabile tale che $\int_\Omega \int_0^T \big| H(\omega, s) - \tilde{H}(\omega, s) \big| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = 0$, e questo permette di estendere l'integrale ai processi misurabili adattati tali che si abbia $\mathbf{E}\big[\int_0^T H_s^2 \, \mathrm{d}s \big] < +\infty$.

Dal punto di vista pratico questa estensione, tecnicamente complicata, non è rilevante, poichè come si è detto è difficile trovare un esempio di un processo che sia misurabile e adattato ma non progressivamente misurabile.

Osservazione 1.5 (I processi prevedibili). Alcuni testi definiscono come integrandi naturali i processi *prevedibili*: si chiama prevedibile un processo stocastico H misurabile rispetto alla σ-algebra su $\Omega \times [0,T]$ generata dai processi adattati con traiettorie continue: chiaramente i processi prevedibili sono progressivamente misurabili ma non è vero il viceversa.

In realtà i processi prevedibili sono importanti quando si vuole considerare l'integrale stocastico rispetto a processi con traiettorie non necessariamente continue (come i processi di Lévy) mentre non sono importanti per l'integrale di Ito: di nuovo infatti vale un risultato simile a quello precedente. Preso un processo H progressivamente misurabile, esiste un processo $\tilde{H}$ prevedibile tale che si abbia $\int_\Omega \int_0^T \big| H(\omega, s) - \tilde{H}(\omega, s) \big| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = 0$.

2 Estensione dell'integrale, processi di Ito.

La condizione di integrabilità imposta nel paragrafo precedente al processo integrando H è decisamente restrittiva: in questo paragrafo mostriamo come si può estendere l'integrale stocastico ai processi progressivamente misurabili H tali che si abbia $\int_0^T H_s^2(\omega)\, \mathrm{d}s < +\infty$ q.c. Tuttavia l'integrale così definito non è più una martingala, ma una *martingala locale*.

Prima di dare le definizioni, occorre introdurre la nozione di *tempo d'arresto*: si chiama **tempo d'arresto** una applicazione $\tau : \Omega \to [0,T]$ tale che, per ogni t fissato, $\big\{ \tau \le t \big\} \in \mathcal{F}_t$. Se la filtrazione è continua a destra, come noi supponiamo, questo è equivalente a dire che, per ogni t , $\big\{ \tau < t \big\} \in \mathcal{F}_t$ (provarlo per esercizio!).

Vediamo subito un facile esempio di tempo d'arresto: preso un processo di Wiener $(W_t)_t$ ed un numero positivo c, poniamo

$$\tau(\omega) = \inf \big\{ s \ge 0 \,\big|\, W_s(\omega) > c \big\} \wedge T$$

La verifica che questo sia effettivamente un tempo d'arresto è immediata: infatti se la traiettoria supera il numero c prima dell'istante t, lo supera anche in un istante razionale e pertanto

$$\big\{ \tau < t \big\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}\,,\, s < t} \big\{ W_s > c \big\} \in \mathcal{F}_t$$

Assegnato un *tempo d'arresto* τ ed un processo stocastico $\big(X_t \big)_{0 \le t \le T}$, si chiama **processo arrestato** il processo stocastico $X_t^\tau(\omega) = X_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) = X(\omega, t \wedge \tau(\omega))$.

Proposizione 2.1. *Se* $(X_t)_{0 \le t \le T}$ *è progressivamente misurabile,* $\big(X_t^\tau \big)_{o \le t \le T}$ *è un processo adattato.*

Dimostrazione. Infatti la variabile aleatoria $X_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega)$ è composizione delle due applicazioni $\omega \to t \wedge \tau(\omega)$ (da Ω in $[0,t]$, misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{F}_t$) e $(\omega, s) \to X(\omega, s)$, da $\Omega \times [0,t]$ in $\mathbb{R}$, misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$. □

In verità si può provare allo stesso modo qualcosa di più: $(X_t^\tau)_{0\leq t\leq T}$ è progressivamente misurabile.

Alcuni testi definiscono i tempi d'arresto a valori in $[0,T] \cup \{+\infty\}$, ma è sostanzialmente la stessa cosa in quanto arrestare a T è la stessa cosa che arrestare a $+\infty$. Naturalmente, se il processo ha come insieme dei tempi $[0,+\infty[$, i tempi d'arresto devono essere a valori in $[0,+\infty]$.

Assegnato un tempo d'arresto τ, definiamo **intervallo stocastico** $[0,\tau]$ il sottinsieme di $\Omega \times [0,T]$ definito da $[0,\tau] = \big\{(\omega,s) \,|\, s \leq \tau(\omega)\big\}$. È facile verificare che $[0,\tau]$ è un sottinsieme *progressivamente misurabile* di $\Omega \times [0,T]$, o, ciò che è lo stesso, la sua *funzione indicatrice* $I_{[0,\tau]}$ è un processo stocastico progressivamente misurabile.

Osservazione 2.2. Arrestare un processo X, in un certo senso, è come *restringere* la funzione X all'intervallo stocastico $[0,\tau]$: infatti la traiettoria del processo arrestato a τ, per $\tau(\omega) < s < T$, coincide col numero $X(\omega, \tau(\omega))$.

Valgono i seguenti risultati:

- si ha $W_t^\tau = \int_0^t I_{[0,\tau]}(s)\,\mathrm{d}W_s$,
- più in generale, se $H \in \mathcal{M}^2$, si ha $\big(\int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s\big)^\tau = \int_0^{t\wedge\tau(\omega)} H_s(\omega)\mathrm{d}W_s(\omega) = \int_0^t \big(I_{[0,\tau]}H_s\big)\mathrm{d}W_s$.

Queste due proprietà sono di facile verifica se il tempo d'arresto τ è *semplice* ossia prende un numero finito di valori (cioè è della forma $\tau = \sum_{i=1}^n t_i I_{A_i}$ dove $A_1, \dots, A_n$ è una partizione di Ω con $A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$), si estendono poi al caso generale considerando, per un tempo d'arresto τ una successione di tempi d'arresto semplici tali che $\tau_n \downarrow \tau$.

Sia ora $\Lambda^2 = \left\{H \text{ progressivamente misurabili} \,\middle|\, \int_0^T H_s^2(\omega)\,\mathrm{d}s < +\infty \text{ q.c.}\right\}$.

Teorema 2.3. *Assegnato $H \in \Lambda^2$, è definito l'integrale stocastico $\big(\int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s\big)$: questo è una* martingala locale. *Inoltre l'integrale stocastico gode di questa proprietà di continuità: presa una successione $(H^n)_{n\geq 1}$ di elementi di Λ^2, se $\left(\int_0^T (H_s^n)^2\,\mathrm{d}s\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, allora $\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t H_s^n\,\mathrm{d}W_s\right|\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.*

Un processo stocastico adattato $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ è detto una *martingala locale* se esiste una successione $(\tau_n)_{n\geq 0}$ di tempi d'arresto crescente e convergente a T *stazionariamente* tale che ogni processo arrestato $(M_t^{\tau_n})_{t\geq 0}$ sia una martingala. Convergere stazionariamente significa che, per ogni ω, esiste $n(\omega)$ tale che, se $n\geq n(\omega)$ si ha $\tau_n(\omega)=T$.

Dimostrazione. L'idea che sta alla base della dimostrazione è quella della osservazione precedente: arrestare un integrale stocastico $\int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s$ al tempo τ (cioè restringere il processo all'intervallo stocastico $[0,\tau]$) equivale a considerare l'integrale stocastico di $(I_{[0,\tau]}.H_s)$.

Consideriamo dunque la successione di tempi d'arresto

$$\tau_n(\omega)\;=\;\inf\big\{s\geq 0\,\big|\,\big(\int_0^s H_u^2\,\mathrm{d}u\big)>n\big\}\wedge T$$

che converge stazionariamente a T, e sia $H_t^n=I_{[0,\tau_n]}(t).H_t$ che è un elemento di $\mathcal{M}^2$.

Per ogni n, è ben definito $\int_0^t H_s^n\,\mathrm{d}W_s$ (che è una martingala di quadrato integrabile) e notiamo che si ha

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} H_s^{n+1}\,\mathrm{d}W_s\;=\;\int_0^t\big(I_{[0,\tau_n]}H_s^{n+1}\big)\mathrm{d}W_s\;=\;\int_0^t H_s^n\,\mathrm{d}W_s$$

Si può così definire il processo $\int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s$ con la proprietà che $\int_0^{t\wedge\tau_n} H_s\,\mathrm{d}W_s=\int_0^t H_s^n\,\mathrm{d}W_s$.

Sia ora $(H^n)_n$ una successione di elementi di Λ^2 tale che $\Big(\int_0^T (H_s^n)^2\,\mathrm{d}s\Big)\xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ e sia $\tau_n(\omega)=\inf\big\{s\geq 0\;\big|\;\int_0^s (H_u^n)^2\,\mathrm{d}u>1\big\}$, poniamo poi $K_s^n=H_s^n.I_{[0,\tau_n]}(s)$.

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{0<t\leq T}\Big|\int_0^t H_s^n\,\mathrm{d}W_s\Big|>\varepsilon\Big\}\leq\mathbf{P}\big\{\tau_n<T\big\}+\mathbf{P}\Big\{\sup_{0<t\leq T}\Big|\int_0^t K_s^n\,\mathrm{d}W_s\Big|>\varepsilon\Big\}\leq$$

$$\leq\mathbf{P}\Big\{\int_0^T (H_s^n)^2\,\mathrm{d}s>1\Big\}\;+\;\frac{4}{\varepsilon^2}\mathbf{E}\Big[\int_0^T (K_s^n)^2\,\mathrm{d}s\Big]$$

L'ultima diseguaglianza è una conseguenza della diseguaglianza di Doob, ed è facile a questo punto verificare che questa probabilità converge a 0. $\square$

In modo analogo a quello che si prova se $H\in\mathcal{M}^2$, si può provare che, se $M_t=\int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s$, la sua *variazione quadratica* $\langle M\rangle_t$ è eguale a $\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s$.

Chiamiamo ora **processo di Ito** un processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ che si possa scrivere nella forma

$$X_t\;=\;X_0+\int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s+\int_0^t K_s\,\mathrm{d}s$$

dove H e K sono due processi progressivamente misurabili tali che si abbia

$$\int_0^T H_s^2(\omega)\,\mathrm{d}s < +\infty \text{ q.c.} \qquad , \qquad \int_0^T \big|K_s(\omega)\big|\,\mathrm{d}s < +\infty \text{ q.c.}$$

Nel calcolo di $\int_0^t K_s(\omega)\mathrm{d}s$, si fissa ω come un parametro e si integra la funzione $s \to K_s(\omega)$ rispetto alla misura di Lebesgue.

La **decomposizione di Ito** è unica, cioè se si ha, per ogni t, $\int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t K_s\,\mathrm{d}s = \int_0^t H'_s\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t K'_s\,\mathrm{d}s$, necessariamente $H_s = H'_s$ e $K_s = K'_s$ (quasi ovunque rispetto alla misura $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathbf{P}$).

Provare questo equivale a provare che se esistono H , K progressivamente misurabili tali che, per ogni t, $\int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s = \int_0^t K_s\,\mathrm{d}s$, necessariamente $H \equiv K \equiv 0$.

A questo scopo si può ricorrere alla *variazione quadratica*: infatti la variazione quadratica di $\int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s$ è $\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s$ mentre la variazione quadratica di $\int_0^t K_s\,\mathrm{d}s$ è naturalmente 0.

Non è difficile provare che se X_t è un processo di Ito avente decomposizione $\mathrm{d}X_t = H_t\mathrm{d}W_t + K_t\mathrm{d}t$ (è comoda questa notazione “differenziale”), la variazione quadratica è $\langle X\rangle_t = \int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s$. Viene comoda la seguente *regola mnemonica* (dopo aver nuovamente precisato che è solo una regola mnemonica) $\big(\mathrm{d}W_t\big)^2 = \mathrm{d}t$; $\mathrm{d}W_t\,\mathrm{d}t = (\mathrm{d}t)^2 = 0$.

In base a questa “regola” si ha $\mathrm{d}\langle X\rangle_t = \big(\mathrm{d}X_t\big)^2 = \big(H_t\mathrm{d}W_t + K_t\mathrm{d}t\big)^2 = H_t^2(\mathrm{d}W_t)^2 = H_t^2\,\mathrm{d}t$.

In modo analogo a come, in uno spazio di Hilbert, si ottiene il prodotto scalare a partire dalla norma mediante la formula $(x|y) = \frac{\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2}{2}$, si può definire la *covariazione quadratica* tra due processi di Ito $(X_t)_t$ e $(Y_t)_t$ mediante la formula

$$\langle X, Y\rangle_t = \frac{\langle X+Y\rangle_t - \langle X\rangle_t - \langle Y\rangle_t}{2}$$

Anche in questo caso la *regola mnemonica* funziona: se $\mathrm{d}X_t = H_t^1\mathrm{d}W_t + K_t^1\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}Y_t = H_t^2\mathrm{d}W_t + K_t^2\mathrm{d}t$, si ha

$$\mathrm{d}\langle X, Y\rangle_t = \mathrm{d}X_t.\mathrm{d}Y_t = \big(H_t^1\mathrm{d}W_t + K_t^2\mathrm{d}t\big).\big(H_t^2\mathrm{d}W_t + K_t^2\mathrm{d}t\big) = H_t^1H_t^2\mathrm{d}t$$

(si noti che $\int_0^T \big|H_t^1H_t^2\big|\mathrm{d}t < +\infty$ q.c. poichè $\int_0^T (H_t^1)^2\mathrm{d}t < +\infty$ q.c. e $\int_0^T (H_t^2)^2\mathrm{d}t < +\infty$).

Assegnato un processo di Ito di decomposizione $\mathrm{d}X_t = H_t\,\mathrm{d}W_t + K_t\,\mathrm{d}t$ ed un processo progressivamente misurabile L_t, è definito l'integrale stocastico

$$\int_0^t L_s\,\mathrm{d}X_s = \int_0^t L_sH_s\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t L_sK_s\,\mathrm{d}s$$

(a patto che si abbia $\int_0^T (L_s H_s)^2\,\mathrm{d}s < +\infty$ q.c. e $\int_0^T |L_s K_s|\,\mathrm{d}s < +\infty$ q.c.)

Notiamo che se $M_t = \int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s$ è una martingala con $H \in \mathcal{M}^2$, si ha $\mathbf{E}\big[\big(\int_0^T L_s \mathrm{d}M_s\big)^2\big] = \mathbf{E}\big[\int_0^T (L_s H_s)^2 \mathrm{d}s\big] = \mathbf{E}\big[\int_0^T H_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\big]$

Un processo di Wiener n-dimensionale è un processo della forma $\mathbf{W}_t = \big(W_t^1, \dots, W_t^n\big)$, dove $W_t^1, \dots, W_t^n$ sono processi di Wiener reali indipendenti. In modo evidente si definiscono l'integrale vettoriale, i processi di Wiener vettoriali, la variazione quadratica ecc.. tenendo presente la *regola mnemonica* $\mathrm{d}W_t^i\,\mathrm{d}W_t^j = 0$ per $i \neq j$.

3 La formula di Ito.

Per introdurre la **formula di Ito**, procediamo un maniera euristica: consideriamo un processo di Ito $(X_t)_{0\le t\le T}$ ed una funzione F di classe C^2 , scriviamo la formula di Taylor in forma differenziale arrestandoci al II ordine (e tenendo presente la regola mnemonica):

$$\mathrm{d}F(X_t) = F'(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{F''(X_t)}{2}\big(\mathrm{d}X_t\big)^2 = F'(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{F''(X_t)}{2}\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t$$

Naturalmente questa introduzione euristica ha bisogno di una dimostrazione rigorosa, che però non è difficile, e si arriva a questo risultato:

Teorema 3.1 (Formula di Ito). *Sia $(X_t)_{0\le t\le T}$ un processo di Ito ed F una funzione di classe C^2 : per ogni $0 \le t \le T$ si ha q.c.*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s$$

Si può constatare facilmente che, poichè $(X_t)_{0\le t\le T}$ è un processo a traiettorie continue, gli integrali stocastici sopra scritti sono ben definiti.

Questa formula ammette una facile estensione vettoriale che scrivo solo in forma differenziale : se $(X_t^1, \dots, X_t^n)_{0\le t\le T}$ sono processi di Ito ed F è di classe C^2 si ha

$$\mathrm{d}F\big(X_t^1, \dots, X_t^n\big) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}\big(X_t^1, \dots, X_t^n\big)\,\mathrm{d}X_t^i +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\big(X_t^1, \dots, X_t^n\big)\,\mathrm{d}\langle X^i, X^j\rangle_t$$

In particolare, prendendo la funzione $F(x,y) = xy$, si ottiene la formula seguente

Proposizione 3.2 (**Formula di integrazione per parti**). *Se* $(X_t, Y_t)_{0\le t\le T}$ *sono due processi di Ito, vale l'eguaglianza*

$$X_t Y_t \;=\; X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \,\mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s \,\mathrm{d}X_s + \langle X, Y\rangle_t$$

La formula 3.2 è un caso particolare della formula di Ito (vettoriale), ma in realtà è lei stessa *essenzialmente la formula di Ito*: infatti una delle possibili strategie per dimostrare la formula 3.1 è la seguente

- per prima cosa si prova direttamente la formula di integrazione per parti
- come conseguenza, si prova per induzione che vale, per ogni n, la formula $\mathrm{d}X_t^n = n\, X_t^{n-1}\,\mathrm{d}X_t + \frac{n(n-1)}{2}\, X_t^{n-2}\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t$
- di conseguenza la formula è vera se F è un polinomio e si estende poi per densità alle funzioni di classe C^2 .

Osservazione 3.3 (**La dimostrazione di Föllmer**). Una dimostrazione originale ed innovativa, tecnicamente elementare, della formula di Ito è stata fornita da H. Föllmer in una breve nota dal titolo provocatorio *"Calcul d'Ito sans probabilités"*.

Questa dimostrazione è basata sulla proprietà di *variazione quadratica* delle traiettorie dei processi di Ito.

4 Teoremi di rappresentazione e teorema di Girsanov.

I risultati di questa sezione dipendono *pesantemente* dal fatto che la filtrazione sia quella generata dal processo di Wiener (la più piccola filtrazione rispetto alla quale $(W_t)_{0\le t\le T}$ è adattato). Consideriamo dunque una generica filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ rispetto alla quale $(W_t)_{0\le t\le T}$ è un processo di Wiener e indichiamo $(\mathcal{F}_t^W)_{0\le t\le T}$ quella generata dal processo (W_t) .

È di fondamentale importanza in seguente risultato

Teorema 4.1 (**Teorema di rappresentazione delle martingale.**). *Se* $(\mathcal{F}_t) = (\mathcal{F}_t^W)$, *ogni martingala di quadrato integrabile* $(M_t)_{0\le t\le T}$ *si scrive nella forma*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s \,\mathrm{d}W_s$$

con un opportuno processo $(H_t) \in \mathcal{M}^2$.

Con piccole modifiche, questo risultato si estende al caso di un processo di Wiener *vettoriale*.

Dimostrazione. Poichè una martingala di quadrato integrabile (se l'insieme dei tempi ha un ultimo istante, in questo caso T) è in corrispondenza biunivoca col valore finale mediante la corrispondenza $M_t = \mathbf{E}[M_T|\mathcal{F}_t]$, il risultato enunciato equivale a dire che ogni $X \in L^2\big(\Omega, \mathcal{F}_T^W, \mathbf{P}\big)$ si scrive nella forma $X = \mathbf{E}[X] + \int_0^T H_s \, \mathrm{d}W_s$, con $H \in \mathcal{M}^2$. Notiamo che l'insieme delle v.a. di questa forma è un sottospazio chiuso di $L^2\big(\Omega, \mathcal{F}_T^W, \mathbf{P}\big)$ (per l'isometria di Ito), quindi questo equivale a dire che ogni v.a. Y di quadrato integrabile ortogonale alle costanti ed agli integrali stocastici è nulla q.c.

Consideriamo i cosiddetti *esponenziali di Wiener*, cioè i processi della forma $\boldsymbol{\varepsilon}(h)_t = \exp\big(\int_0^t h(s) \, \mathrm{d}W_s - 1/2 \int_0^t h^2(s) \mathrm{d}s\big)$ con $h \in L^2(0,T)$ (h è una funzione di t, non un processo stocastico): è facile verificare che è soddisfatta l'equazione $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}(h)_t = h(t) \, \boldsymbol{\varepsilon}(h)_t \, \mathrm{d}W_t$ da cui risulta che $\boldsymbol{\varepsilon}(h)_t$ è una martingala locale. In realtà, poichè $\int_0^t h(s) \, \mathrm{d}W_s$ è una variabile gaussiana $N\big(0, \int_0^t h^2(s) \, \mathrm{d}s\big)$ si verifica immediatamente che è una vera martingala di quadrato integrabile.

Sia allora Y ortogonale alle costanti (cioè $\mathbf{E}[Y] = 0$) e agli integrali stocastici: si ha pertanto, scelti comunque $t_1 < t_2 \cdots < t_n$ e $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}\Big[Y \, . \, \mathrm{e}^{\big(u_1 W_{t_1} + u_2 (W_{t_2} - W_{t_1}) + \cdots + u_n (W_{t_n} - W_{t_{n-1}})\big)}\Big] = 0$$

Si ha $\mathbf{E}[Y^+] = \mathbf{E}[Y^-]$ (e possiamo supporre che sia eguale ad 1): consideriamo le due probabilità $\mathbf{P}^1 = Y^+ . \mathbf{P}$ e $\mathbf{P}^2 = Y^- . \mathbf{P}$: le variabili $\big(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\big)$ hanno la stessa trasformata di Laplace (o funzione generatrice dei momenti) e quindi la stessa legge di probabilità per entrambe le probabilità. Allora $\mathbf{P}^1$ e $\mathbf{P}^2$ coincidono sulle σ-algebre generate da queste v.a. (al variare di n e di $t_1, \ldots, t_n$), cioè su una famiglia di parti stabile per l'intersezione che genera la σ-algebra $\mathcal{F}_T^W$.

Di conseguenza $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^2$ ossia $Y^+ = Y^-$ q.c. ossia $Y = 0$ q.c. □

Il teorema 4.1 ammette una estensione alle *martingale locali*: ogni martingala locale $(M_t)_{0 \le t \le T}$ sulla filtrazione browniana si scrive nella forma $M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, \mathrm{d}W_s$ con un opportuno $H \in \Lambda^2$. Questa estensione non è affatto banale: il punto veramente delicato è provare che ogni martingala locale (sulla filtrazione browniana) ha traiettorie continue (per le martingale di quadrato integrabile questo fatto è una ovvia conseguenza del teorema 4.1). Una volta acquisito questo risultato tutto diventa facile: si considera la successione di tempi d'arresto $\tau_n = \inf\big\{s \ge 0 \big| \, |M_s| \ge n\big\} \wedge T$ e si applica il risultato 4.1 alle martingale *arrestate* $\big(M_t^{\tau_n}\big)_{0\le t\le T}$ (i dettagli sono lasciati per esercizio).

Vediamo ora l'importante *teorema di Girsanov.* Cominciamo a supporre che $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ sia una filtrazione qualsiasi (rispetto alla quale (W_t) è un processo di Wiener), sia $\mathbf{Q}\sim\mathbf{P}$ una probabilità equivalente e sia poi $L_T=\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}$ la relativa densità. Consideriamo la martingala $L_t=\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[L_T|\mathcal{F}_t]$: è facile verificare che L_t è la densità di $\mathbf{Q}$ rispetto a $\mathbf{P}$ *ristrette* alla σ-algebra $\mathcal{F}_t$ e che un processo adattato $(N_t)_{0\le t\le T}$ è una $\mathbf{Q}$-martingala se è solo se $(N_tL_t)_{0\le t\le T}$ è una $\mathbf{P}$-martingala.

Entrambe queste affermazioni sono una conseguenza della cosiddetta *formula di Bayes* per la probabilità condizionale, vediamo ad esempio la seconda. Innanzi tutto N_t è $\mathbf{Q}$-integrabile se e solo se N_tL_t è $\mathbf{P}$-integrabile; inoltre si ha

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[N_t\big|\mathcal{F}_s\big]=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[N_tL_T\big|\mathcal{F}_s\big]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[L_T\big|\mathcal{F}_s\big]}=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[N_tL_t\big|\mathcal{F}_s\big]}{L_s}$$

Sia dunque $H\in\Lambda^2$ e consideriamo la soluzione dell'equazione

$$\mathrm{d}L_t\;=\;H_tL_t\,\mathrm{d}W_t\qquad,\qquad L_0=1$$

che si scrive esplicitamente nella forma

$$L_t\;=\;\exp\Big(\int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s-\frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s\Big)$$

Teorema 4.2 (Teorema di Girsanov). *Supponiamo che valga l'eguaglianza* $\mathbf{E}[L_T]=1$ *e consideriamo la probabilità* $\mathbf{Q}$ *avente densità* L_T *rispetto a* $\mathbf{P}$ *: rispetto alla probabilità* $\mathbf{Q}$ *il processo stocastico* $W_t^*=\big(W_t-\int_0^t H_s\,\mathrm{d}s\big)$ *è un processo di Wiener.*

Inoltre, se $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t^W$ *, ogni probabilità equivalente si ottiene in questa forma.*

Commentiamo l'ipotesi $\mathbf{E}[L_T]=1$: se L_t risolve l'equazione $\mathrm{d}L_t=H_tL_t\,\mathrm{d}W_t$, è una martingala locale (inoltre è a valori positivi). Consideriamo allora una successione di t.d.a. τ_n convergente stazionariamente verso T e tale che, per ogni n , il processo arrestato $(L_t^{\tau_n})$ sia una martingala: per ogni n si ha $\mathbf{E}\big[L_{\tau_n\wedge T}\big]=\mathbf{E}\big[L_0\big]=1$, e di conseguenza (per il Lemma di Fatou) si ha al limite $\mathbf{E}\big[L_T\big]\le 1$. Affermare che vale l'eguaglianza $\mathbf{E}[L_T]=1$ è la stessa cosa che affermare che il processo $(L_t)_{0\le t\le T}$ è una **vera martingala**.

Ci sono solo *condizioni sufficienti* che garantiscono questa proprietà, tra le quali la più nota è la **condizione di Novikov**: se si ha

$$\mathbf{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^T H_s^2\,\mathrm{d}s\Big)\Big]<+\infty$$

allora si ha $\mathbf{E}[L_T]=1$.

Vediamo ora la dimostrazione del teorema 4.2.

Dimostrazione. Occorre provare che si ha, presi $s<t$:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\mathrm{e}^{iu(W_t^*-W_s^*)}\middle|\mathcal{F}_s\right]=\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}$$

(infatti in questo modo si ottiene che $(W_t^*-W_s^*)$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$ e di legge gaussiana $N(0,t-s)$).

Questo equivale a dire che si ha $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\mathrm{e}^{iuW_t^*+\frac{u^2}{2}t}\middle|\mathcal{F}_s\right]=\mathrm{e}^{iuW_s^*+\frac{u^2}{2}s}$, ossia che $L_t\,\mathrm{e}^{iuW_t^*+\frac{u^2}{2}t}$ è una $\mathbf{P}$-martingala (il fatto che questi processi siano a valori complessi non comporta alcuna difficoltà).

Facendo i conti

$$L_t\,\mathrm{e}^{iuW_t^*+\frac{u^2}{2}t}=\exp\Big(\int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s-\frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s+iuW_t-iu\int_0^t H_s\,\mathrm{d}s+\frac{u^2}{2}t\Big)=$$

$$=\exp\Big(\int_0^t\big(iu+H_s\big)\,\mathrm{d}W_s-\frac{1}{2}\int_0^t\big(iu+H_s\big)^2\,\mathrm{d}s\Big)$$

Dunque questa è una martingala locale; tuttavia, poichè per ipotesi $L_t=\exp\Big(\int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s-\frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s\Big)$ è una vera martingala di quadrato integrabile e $\mathrm{e}^{iuW_t^*+\frac{u^2}{2}t}$ è uniformemente limitata, è immediato concludere che pure $L_t\,\mathrm{e}^{iuW_t^*-\frac{u^2}{2}t}$ è una vera martingala.

Vediamo ora l'ultima affermazione: sia $\mathbf{Q}\sim\mathbf{P}$, sia $L_T=\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}$ e consideriamo la martingala $L_t=\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[L_T\middle|\mathcal{F}_t\right]$. Se $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t^W$, L_t (essendo un integrale stocastico rispetto a W_t) soddisfa un'equazione della forma $\mathrm{d}L_t=K_t\mathrm{d}W_t$ (con K_t progressivamente misurabile tale che $\int_0^T K_s(\omega)^2\,\mathrm{d}s<+\infty$ q.c.): siamo tentati di scrivere $\mathrm{d}L_t=\big(\frac{K_t}{L_t}\big)L_t\,\mathrm{d}W_t$ (ed ottenere così il risultato cercato), ma possiamo farlo solo se L_t è strettamente positivo. Per ogni t fissato, la v.a. L_t (essendo la densità di $\mathbf{Q}$ rispetto a $\mathbf{P}$ ristretta a $\mathcal{F}_t$) è strettamente positiva $\mathbf{P}$-quasi ovunque e di conseguenza $\big\{(\omega,t)\big|\,L(\omega,t)=0\big\}$ è $\mathbf{P}\otimes\lambda$ trascurabile.

□

Osservazione 4.3. Quanto è affermato nell'ultima frase in realtà non è molto rigoroso, e la giustificazione precisa è più delicata: infatti non basta provare che $L(\omega,t)\neq 0$ $\mathbf{P}\otimes\lambda$ q.c., bisogna provare che per quasi ogni traiettoria vale la diseguaglianza $\int_0^T\big(\frac{K_s}{L_s}\big)^2\,\mathrm{d}s<+\infty$.

Questo fatto è una facile conseguenza di una proprietà delle traiettorie delle martingale a valori positivi di dimostrazione non immediata: più precisamente le traiettorie di una supermartingala a valori positivi, se raggiungono il valore 0, restano eguali a 0 da quell'istante fino alla fine.

Poiché $L_T \neq 0$ q.c., si vede che quasi tutte le traiettorie (che sono continue) si mantengono lontane da 0 e quindi tutto diventa rigoroso.

5 Cenni di bibliografia.

Diversi ottimi libri offrono una presentazione essenziale dell'integrale stocastico secondo Ito, ad esempio i due seguenti:

- Lamberton, Lapeyre *"Introduction to Stochastic Calculus applied to Finance".*

- Bjork *"Arbitrage Theory in Continuous time".*

Una ottima presentazione è fornita dal seguente libro, pubblicato come *"Quaderno dell'U.M.I."*:

- Baldi *"Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni".*

Il riferimento forse più noto sull'integrazione stocastica riguardo a semimartingale continue è fornito dal libro:

- Karatzas, Shreve *"Brownian motion and stochastic calculus".*

Di gran lunga il riferimento più completo e tecnicamente avanzato per quanto riguarda il processo di Wiener in tutti i suoi aspetti (non solo l'integrazione stocastica) è fornito da:

- Revuz, Yor *"Continuous martingales and Brownian Motion".*

Per quanto riguarda l'integrale stocastico e le equazioni differenziali stocastiche rispetto al moto Browniano, a valori in spazi di dimensione infinita, il riferimento d'obbligo è:

- Da Prato, Zabczyk *"Stochastic equations in Infinite Dimensions".*

Passando all'integrazione stocastica generale, rispetto a semimartingale possibilmente discontinue, l'argomento diventa molto più tecnico ed i riferimenti affidabili sono molto pochi. È una ottima presentazione il libro:

- Protter *"Stochastic Integration and differential equations".*

Tuttavia questo libro non affronta alcune questioni tecnicamente complicate come le misure aleatorie. Per le nozioni più avanzate il riferimento sicuro è:

- Jacod, Shiryaev *"Limit theorems for stochastic processes"*.

La lettura di quest'ultimo libro è però decisamente impegnativa.