Esercizi di Calcolo delle Probabilità

M. Pratelli e M. Romito

Gli esercizi che seguono sono stati proposti nel corso "Probabilità" dell'Università di Pisa negli a.a. 2012-13 e 2013-14 (M. Romito) e 2014-15 (M. Pratelli). I capitoli ai quali si fa riferimento sono quelli degli appunti *Un corso di Calcolo delle Probabilità, a.a. 2015-16.*

Parte degli esercizi che seguono sono stati ispirati dal libro *Probability Essentials* (di J. Jacod e P. Protter), e parte dal libro *Probability: theory and examples* (di R. Durret).

Alcuni degli esercizi relativi al Capitolo 1 sono in realtà un ripasso di proprietà delle variabili aleatorie svolte nel corso del secondo anno (E.P.S.).

1 Esercizi relativi al Capitolo 1

Esercizio 1.1. Siano $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}^*$ due probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$ e sia

$$\mathcal{M} = \big\{A \in \mathcal{F} \,\big|\, \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}^*(A)\big\}$$

$\mathcal{M}$ è una *classe monotona* ma non necessariamente una σ-algebra. Per trovare un esempio, si può considerare come $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\big)$ il lancio (ripetuto n volte) di due monete equilibrate indipendenti, e come $\mathbf{P}^*$ il risultato di due monete delle quali la prima è lanciata regolarmente (n volte) e la seconda eguale alla prima.

Esercizio 1.2. Sia $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\big)$ uno spazio di probabilità, fissiamo $A \in \mathcal{F}$ e sia

$$\mathcal{M} = \big\{B \in \mathcal{F} \,\big|\, A \,\mathrm{e}\, B \text{ sono indipendenti}\,\big\}$$

$\mathcal{M}$ è una *classe monotona* ma non necessariamente una σ-algebra.

Esercizio 1.3. Sia $\Omega = \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{A}$ la famiglia dei sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ tali che A oppure A^c è finito. Provare che $\mathcal{A}$ è un'algebra (ma non una σ-algebra) e che la funzione $\mathbf{P}$ su $\mathcal{A}$ definita da $\mathbf{P}(A) = 0$ se A è finito e $\mathbf{P}(A) = 1$ se A^c è finito è σ–additiva su $\mathcal{A}$.

Esercizio 1.4. Sia $\Omega = \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{F}$ la famiglia dei sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ tali che A oppure A^c è numerabile. Provare che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra (che coincide con la $<$ *si*–algebra generata dalla famiglia $\mathcal{A}$ dell'esercizio precedente) e che la funzione $\mathbf{P}$ su $\mathcal{F}$ definita da $\mathbf{P}(A) = 0$ se A è numerabile e $\mathbf{P}(A) = 1$ se A^c è numerabile è una probabilità su $\mathcal{F}$ (e coincide con il prolungamento della funzione σ–additiva definita nell'esercizio precedente).

Esercizio 1.5. Provare che per ogni variabile aleatoria X a valori positivi vale la formula

$$\mathbf{E}\big[\,X\,\big] = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\big\{X \geq t\big\}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\big\{X > t\big\}\,\mathrm{d}t$$

Più in generale, se X è a valori reali e $1 \leq p < +\infty$, si ha

$$\mathbf{E}\big[\,\big|X\big|^p\,\big] = \int_0^{+\infty} p\,t^{p-1}\,\mathbf{P}\big\{\big|X\big| > t\big\}\,\mathrm{d}t$$

Esercizio 1.6. Sia X una v.a. a valori positivi, e $a > 0$: è noti che si ha (diseguaglianza di Markov) $a\,\mathbf{P}\{X \geq a\} \leq \mathbf{E}[X]$. Provare che si ha

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{a\,\mathbf{P}\{X \geq a\}}{\mathbf{E}[X]} = 0$$

Sotto quale condizione si ha più in generale $\lim_{a\to+\infty} a\,\mathbf{P}\{X \geq a\} = 0$?

Esercizio 1.7. Sia X una variabile *geometrica* di parametro p: provare che si ha

$$\mathbf{E}\Big[\frac{1}{X}\Big] \;=\; \frac{p\,\log(p)}{p-1}$$

Suggerimento: derivare per serie.

Esercizio 1.8. Si chiama densità di Cauchy la funzione $f(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$: provare che una v.a. X che ha densità di Cauchy non ha momenti di alcun ordine. Esaminare inoltre per quali numeri reali r si ha $\mathbf{E}[\,|X|^r\,] < +\infty$.

Esercizio 1.9. Si chiama variabile *log–normale* (di parametri μ e σ^2) una v.a. che ha la legge di probabilità di e^X , dove $X \sim N\big(\mu, \sigma^2\big)$.

Calcolare la densità ed il valore atteso di una variabile lognormale.

Esercizio 1.10. Siano U, V due variabili indipendenti con densità uniforme sull'intervallo $[0, 1]$: provare che le variabili X, Y definite da

$$X = \sqrt{-2\log U}\,\cos(2\pi V)\ , \quad Y = \sqrt{-2\log U}\,\sin(2\pi V)$$

sono gaussiane $N(0, 1)$ indipendenti .

2 Esercizi relativi al Capitolo 2

Esercizio 2.1. Sia F una *funzione di ripartizione* e supponiamo che F sia biunivoca da un intervallo $]a, b[$ (gli estremi possono essere $-\infty$ o $+\infty$) su $]0, 1[$ (notare che F è necessariamente continua).

Provare che se X ha f.r. F, $Y = F(X)$ ha densità *uniforme* su $]0, 1[$. Provare che se U è una variabile con densità uniforme su $]0, 1[$, $F^{-1}(U)$ ha funzione di ripartizione F.

Esercizio 2.2. Siano X, Y indipendenti e supponiamo che si abbia $\mathbf{P}\big\{X + Y = \alpha\big\} = 1$ (con una opportuna costante α): provare che X e Y sono costanti (q.c.)

Esercizio 2.3. Sia $\big(A_n\big)_{n\geq 1}$ una successione di eventi: caratterizzare esplicitamente l'evento

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k$$

Provare che valgono le disuguaglianze

$$\mathbf{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) \;\geq\; \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(A_n\big)$$

$$\mathbf{P}\big(\liminf_{n\to\infty} A_n\big) \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(A_n\big)$$

Trovare degli esempi nei quali le disuguaglianze sopra scritte sono strette.

Esercizio 2.4. Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili i.i.d. tali che $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = 1/2$, e sia, per ogni i, $Z_i = X_1 \cdots X_i$. Provare che le variabili $Z_1, Z_2, \ldots$ sono indipendenti.

Esercizio 2.5. Con le notazioni dell'esercizio precedente, siano $X = X_1$ $Y = X_2$ e $Z = X_1.X_2$. Provare che le variabili X, Y, Z sono a due a due indipendenti, ma che non formano una terna di variabili indipendenti.

Esercizio 2.6. Siano X e Y due v.a. a valori reali: provare che sono indipendenti se e solo se, per ogni coppia (f, g) di funzioni reali continue e limitate, vale l'eguaglianza

$$\mathbf{E}\big[\, f(X)\, g(Y)\,\big] \;=\; \mathbf{E}\big[\, f(X)\,\big]\, \mathbf{E}\big[\, g(Y)\,\big]$$

Esercizio 2.7. (*) Sia X una v.a.r. a valori positivi definita su $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\big)$: provare che esiste una probabilità $\widetilde{\mathbf{P}}$ equivalente a $\mathbf{P}$ che rende X integrabile. Sia ora $\big(X_n\big)_{n\geq 1}$ una successione di v.a. a valori positivi: provare che esiste una probabilità equivalente $\widetilde{\mathbf{P}}$ sotto la quale ogni X_n è integrabile. (*Suggerimento*: provare mediante il lemma di Borel–Cantelli che esistono delle costanti strettamente positive c_n tali che si abbia $\sum_{n\geq 1} c_n X_n < +\infty$ q.c.).

Esercizio 2.8. Siano $X_1, X_2, \dots$ indipendenti con funzione di ripartizione rispettivamente $F_1, F_2, \dots$; provare che

$$\mathbf{P}\big\{ \sup_{n\geq 1} X_n < +\infty \big\} = 1 \Leftrightarrow \exists\ x \ \text{ tale che } \sum_{n\geq 1} \big(1 - F_n(x)\big) < +\infty$$

Esercizio 2.9. Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di v.a. indipendenti uniformemente distribuite sull'intervallo $[-1, 1]$: provare che con probabilità 1 la successione di numeri $nX_n(\omega)$ è densa in $\mathbb{R}$, mentre sempre con probabilità 1 la successione di numeri $n^2\, X_n(\omega)$ non è densa in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.10. Siano $X_1, X_2, \dots$ indipendenti con

$$\mathbf{P}\{X_n = 1\} = \frac{1}{2^n} \qquad \mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Dopo aver constatato che $\sum_{n\geq 1} X_n < +\infty$ q.c., provare che per ogni $h = 0,\ 1,\ \dots$ si ha $\mathbf{P}\big\{ \sum_{n\geq 1} X_n = h \big\} > 0$. In particolare

$$\mathbf{P}\big\{ \sum_{n\geq 1} X_n = 0 \big\} = \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - \frac{1}{2^n}\big) > 0$$

$$\mathbf{P}\big\{ \sum_{n\geq 1} X_n = 1 \big\} = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1} \Big) \Big(\prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - \frac{1}{2^n}\big) \Big) > 0$$

Esercizio 2.11. Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di variabili i.i.d. con densità esponenziale di parametro λ: provare che si ha

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 0 \ \text{ q.c.} \qquad\qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = \frac{1}{\lambda} \ \text{ q.c.}$$

3 Esercizi relativi al capitolo 3

Esercizio 3.1. Provare che se α è complesso con parte reale strettamente positiva e r reale strettamente positivo, è soddisfatta l'eguaglianza

$$\int_0^{+\infty} \alpha^r\, x^{r-1}\, \mathrm{e}^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x = \Gamma(r)$$

e dedurne che la funzione caratteristica della variabile di densità $\Gamma(r, \lambda)$ è eguale a $\left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^r$.

Esercizio 3.2. Provare che una funzione caratteristica φ è **semidefinita–positiva** nel senso seguente: scelti comunque n numeri reali $t_1, \dots, t_n$ e n complessi $z_1, \dots, z_n$ si ha

$$\sum_{h,\,k=1}^{n} \varphi(t_h - t_k)\, z_h\, \overline{z}_k \geq 0$$

Un importante **teorema di Bochner** afferma il viceversa, cioè se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è, continua, semidefinita–positiva, con $\varphi(0) = 1$, allora φ è la funzione caratteristica di una opportuna misura di probabilità su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.3. Provare che la funzione caratteristica φ di una v.a. reale X è a valori reali se e solo se la legge di probabilità di X è simmetrica (cioè X e $-X$ sono equidistribuite).

Esercizio 3.4. Sia φ una funzione caratteristica e supponiamo che si abbia, intorno a 0, $\varphi(t) = 1 + o(t^2)$: provare che necessariamente φ è la costante 1.

Esercizio 3.5. Siano X e Y indipendenti, supponiamo che X abbia densità esponenziale di parametro λ e $(X+Y)$ abbia densità $\Gamma(2, \lambda)$: si può affermare che Y ha densità esponenziale di parametro λ?

Esercizio 3.6. Provare che per una variabile aleatoria X con densità esponenziale non può valere la formula di inversione

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx}\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

Più un generale, se X ha densità $\Gamma\big(r, \lambda\big)$, per quali valori di r vale la formula di inversione sopra scritta? Perchè dobbiamo aspettarci questo risultato?

Esercizio 3.7. Si chiama densità *esponenziale doppia* (o anche *densità di Laplace*) la funzione $f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}$. Calcolare la funzione caratteristica di una variabile con densità esponenziale doppia, e dedurne la funzione caratteristica di una variabile con densità di Cauchy.

Esercizio 3.8. Provare che se X ha densità $N(0,1)$, valgono le seguenti formule per i suoi momenti

$$\mathbf{E}\big[X^{2n+1}\big] \;=\; 0 \qquad \mathbf{E}\big[X^{2n}\big] \;=\; \frac{(2n)!}{2^n\; n!}$$

Esercizio 3.9. Perchè la funzione $\varphi(t) = \mathrm{e}^{i|t|}$ non può essere una funzione caratteristica? Viceversa, la funzione $\psi(t) = \mathrm{e}^{it}$ è una funziona caratteristica: di quale variabile aleatoria? (*Suggerimento*: quanto vale in generale $\varphi(-t)$?)

Esercizio 3.10. Sia X una v.a. a valori interi (relativi) e sia φ la sua funzione caratteristica: provare la formula

$$\mathbf{P}\big\{X = k\big\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{-ikt}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

(*Suggerimento*: scrivere esplicitamente la formula di $\varphi(t)$ per una v.a. a valori interi.)

Esercizio 3.11. Sia (X, Y) un vettore gaussiano: provare che esiste una costante ρ tale che le variabili X e $(Y - \rho X)$ siano indipendenti. Qual è l'unico caso in cui ρ non è univocamente determinata?

4 Esercizi relativi al capitolo 4

Esercizio 4.1. Una successione di variabili aleatorie X_n si dice *completamente convergente* a X se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\sum_{n\geq 1}\mathbf{P}\big\{\big|X_n - X\big| > \varepsilon\big\} < +\infty$$

Provare che una successione completamente convergente converge q.c. ad X. Provare che se le variabili $(X_n)_{n\geq 1}$ formano una famiglia di v.a. indipendenti convergente q.c ad X, la successione è completamente convergente.

(*Suggerimento*: attenzione, occorre provare che le variabili $(X_n - X)$ sono indipendenti, ma questo è facile! Perché?)

Esercizio 4.2. Sia $X_n \to X$ q.c. e sia $Y = \sup_n |X_n|$: provare che si ha $Y < +\infty$ q.c. Dedurne che esiste una probabilità equivalente $\widetilde{\mathbf{P}}$ sotto la quale $X_n \to X$ in L^1. Provare che l'affermazione precedente è falsa se $X_n \to X$ in probabilità.

Esercizio 4.3. Siano X_n, X variabili aleatorie reali, F_n, F le relative funzioni di ripartizione, e sia g una funzione continua integrabile *strettamente positiva* (ad esempio $g(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$): provare che $X_n \to X$ in legge se e solo se

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\big|F_n(x) - F(x)\big|\,g(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0$$

Dedurne che la distanza (tra funzioni di ripartizione)

$$d(F, G) = \int_{-\infty}^{+\infty}\big|F(x) - G(x)\big|\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

è una distanza che induce la convergenza stretta.

Esercizio 4.4. Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di v.a. limitata in L^p con $1 \leq p \leq +\infty$: provare che la famiglia delle leggi di probabilità delle v.a. X_n è *tesa*.

Esercizio 4.5. Siano X_n, X variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}^d$: provare che la successione $(X_n)_{n\geq 1}$ converge in legge ad X se e solo se, per ogni $u \in \mathbb{R}^d$, la successione di v.a.r. $\big(< u\,, X_n > \big)_{n\geq 1}$ converge in legge alla variabile $< u\,, X >$.

Esercizio 4.6. Siano X_n e X v.a. a valori interi: provare che X_n converge in legge a X se e solo se, per ogni intero k, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X_n = k\} = \mathbf{P}\{X = k\}$. Viceversa, presa una successione X_n come sopra, è possibile che esista, per ogni intero k, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X_n = k\}$, ma che la successione non converga in legge.

Esercizio 4.7. Siano X_n, X variabili aleatorie reali, e supponiamo che $X_n \to X$ in legge e che X abbia una legge diffusa: provare che $F_n(.) \to F(.)$ uniformemente.

Esercizio 4.8. Siano X_n, X, Y tutte definite sul medesimo spazio e supponiamo che, per ogni $\sigma > 0$, $(X_n + \sigma Y)$ converga in legge a $(X + \sigma Y)$: provare che $X_n \to X$ in legge.

Esercizio 4.9. Siano X_n, Y_n, X, Y tutte definite sul medesimo spazio: supponiamo che $X_n \to X$ in legge, $Y_n \to Y$ in legge, che (X_n, Y_n) (risp. (X, Y)) sia una coppia di v.a. indipendenti: provare che $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ in legge.

Esercizio 4.10. Siano X_n, X, Y definite sul medesimo spazio, e supponiamo che si abbia

$$\mathbf{E}\big[f(X_n)\, g(Y)\big] \longrightarrow \mathbf{E}\big[f(X)\, g(Y)\big]$$

ogni volta che f è continua e limitata, g boreliana e limitata: provare che $(X_n, Y) \longrightarrow (X, Y)$ in legge. Se inoltre $X = h(Y)$ (con h boreliana), provare che $X_n \longrightarrow X$ in probabilità.

Esercizio 4.11. Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di v.a.r. gaussiane e supponiamo che, presi comunque n, m , $(X_n - X_m)$ sia gaussiana: se $X_n \to X$ in probabilità, allora $X_n \to X$ in L^2 (anzi, più precisamente in ogni L^p con $1 \leq p < +\infty$).

Esercizio 4.12. Si chiama **spazio gaussiano** un sottospazio vettoriale $\mathcal{H}$ di $L^2\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\big)$ tale che ogni elemento di $\mathcal{H}$ sia una variabile gaussiana.

Provare che, presi $X_1, \ldots, X_n$ elementi di $\mathcal{H}$, il vettore $\big(X_1, \ldots, X_n\big)$ è gaussiano; provare che la chiusura di uno spazio gaussiano è ancora uno spazio gaussiano e che, se $\mathcal{H}$ è uno spazio gaussiano, le chiusure di $\mathcal{H}$ rispetto alla convergenza in L^2 e in probabilità coincidono.

Provare che se $\big(X_i\big)_{i\in I}$ è una famiglia di v.a. gaussiane indipendenti, il sottospazio vettoriale generato è uno spazio gaussiano.

Provare che se lo spazio Ω è numerabile, l'unico spazio gaussiano definito su Ω è quello banale costituito dalle sole costanti.

Esercizio 4.13. Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di v.a. convergente in legge a X e supponiamo che la successione sia *limitata* in L^p con $p > 1$: allora $\mathbf{E}[X_n] \to \mathbf{E}[X]$. Mostrare con un controesempio che questa proprietà non è soddisfatta se la successione è limitata in L^1.

Esercizio 4.14. Costruire una successione $X_1, X_2, \ldots$ di v.a. indipendenti (di quadrato integrabile) tale che $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$ in probabilità e $\mathbf{E}[X_n] \to -\infty$. Prendiamo poi $Z \sim N(1,1)$ indipendente dalle $(X_n)_{n\geq 1}$ e poniamo $Z_n = ZX_n$: provare che

a) $\mathbf{E}[Z_n] \to -\infty$ b) $Var(Z_n) \to +\infty$
c) $Z_n \to Z$ in legge.

5 Esercizi relativi al capitolo 5

Esercizio 5.1. Siano $X_1, X_2, \ldots$ v.a.r. *equidistribuite*: provare che $\frac{X_n}{n}$ converge in probabilità a 0. Provare che se le v.a. X_i sono integrabili, la convergenza è quasi certa; inoltre se le v.a. sono *indipendenti* se la convergenza è quasi certa le v.a. sono integrabili, mentre senza la condizione di indipendenza quest'ultima affermazione è falsa.
(*Suggerimento*: tenere presenti il Lemma 5.3.4 degli appunti ed il Lemma di Borel–Cantelli.)

Esercizio 5.2. (*) Siano $X_1, X_2, \ldots$ variabili i.i.d. e sia φ la comune funzione caratteristica: provare che $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ converge in probabilità ad a se e solo se φ è derivabile nel punto 0 e si ha $\varphi'(0) = ia$.

Esercizio 5.3. Siano $X_1, \ldots, X_n$ indipendenti con densità di Cauchy: provare che $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ha ancora densità di Cauchy. In quale senso questo risultato fornisce un *controesempio* alla legge dei grandi numeri?
(*Suggerimento*: riguardare l'Esercizio 3.7.)

Esercizio 5.4. Siano $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. con $\mathbf{E}[X_i] = \mu$, $Y_1, Y_2, \ldots$ i.i.d. con $\mathbf{E}[Y_j] = \nu$ (con $\nu \neq 0$): provare che

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{Y_1 + \cdots + Y_n} \longrightarrow \frac{\mu}{\nu} \quad \text{q.c.}$$

Esercizio 5.5. Sia, per ogni n, Y_n una variabile con legge di Poisson di parametro n : provare che

$$\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} \longrightarrow Z \qquad \text{in legge}$$

dove $Z \sim N(0,1)$. Dedurne il seguente risultato

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 5.6. Siano $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. a valori positivi, con $\mathbf{E}[X_i] = 1$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$: provare che

$$\frac{2}{\sigma}\Big(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}\Big) \longrightarrow N(0,1) \qquad \text{in legge}$$

(*Suggerimento*: $\big(S_n - n\big) = \Big(\sqrt{S_n} + \sqrt{n}\Big)\Big(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}\Big)$.)

Esercizio 5.7. Siano $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. con densità uniforme su $[-1,1]$: provare che

$$\sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i\le n} X_i}{\sum_{i\le n} X_i^2 + \sum_{i\le n} X_i^3}\right) \longrightarrow N(0,3) \qquad \text{in legge}$$

Esercizio 5.8. Siano $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. con $\mathbf{E}[X_i] = 0$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$: provare che si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\Big[\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\Big] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma$$

Esercizio 5.9. Siano $X_1, X_2, \ldots$ come nell'esercizio precedente: provare che si ha

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ q.c.} \qquad\qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty \text{ q.c.}$$

Esercizio 5.10. Sia X di quadrato integrabile dotata di questa proprietà: la sua legge è eguale alla legge di $\frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$ dove Y e Z sono indipendenti ed hanno la stessa legge di X . Provare che X è gaussiana centrata.

Esercizio 5.11. Siano $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. con densità $f(x) = 3x^2.I_{[0,1]}(x)$ e sia $Y_n = \big(X_1. \ldots .X_n\big)^{1/n}$: la successione Y_n converge in qualche senso ed a quale limite?

Esercizio 5.12. Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di variabili i.i.d. tali che $\mathbf{P}\{X_i = 1\} = p\,, \mathbf{P}\{X_i = -1\} = 1 - p\,$, con $0 < p < 1\,$, e sia $\alpha > 0$: dopo aver constatato che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X_n}{n^\alpha}$ converge con probabilità 0 oppure 1, esaminare in funzione di p e di α quando la serie converge.

Esercizio 5.13. Siano $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. con densità uniforme su $[0, a]\,$, e sia $R_n = \prod_{k=1}^{n} X_k\,$. Dopo aver constatato che la successione $(R_n)_{n\geq 1}$ converge o non converge con probabilità 1, esaminare in funzione di a se esiste il limite della successione $(R_n)_{n\geq 1}\,$.

6 Esercizi relativi al capitolo 6

Esercizio 6.1. Sia X una v.a. integrabile: provare che vale l'eguaglianza $\mathbf{E}[X|T] = g(T)$ se e solo se $g(T)$ è integrabile e per ogni funzione φ boreliana limitata, si ha $\mathbf{E}[\,X\,\varphi(T)\,] = \mathbf{E}[\,g(T)\,\varphi(T)\,]\,$.

Esercizio 6.2. Sia $X \in L^1\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\big)$ e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$: si dice che X è *ortogonale* a $\mathcal{G}$ se si ha $\int_A X\,\mathrm{d}\mathbf{P} = 0$ per ogni $A \in \mathcal{G}\,$. Provare che $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ è l'*unica* (a meno di equivalenza) v.a. $Y \in L^1\big(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P}\big)$ tale che $(X - Y)$ sia *ortogonale* a $\mathcal{G}\,$. (Alcuni testi riportano questa caratterizzazione come *definizione* di speranza condizionale).

Esercizio 6.3. Sia X una v.a.r. con densità f e supponiamo che la densità sia strettamente positiva ovunque: data φ boreliana limitata, calcolare $\mathbf{E}\big[\varphi(X)|X^2\big]\,$.

Esercizio 6.4. Sia X a valori positivi (e quindi è definita $\mathbf{E}\big[\,X\big|\mathcal{G}\big]$): provare che se $X \leq c$ q.c. anche $\mathbf{E}\big[\,X\big|\mathcal{G}\big] \leq c$ q.c. , mentre se X è a valori reali (cioè $X < +\infty$ q.c.) non necessariamente si ha $\mathbf{E}\big[\,X\big|\mathcal{G}\big] < +\infty$ q.c.

Esercizio 6.5. Sia Y di quadrato integrabile e supponiamo che si abbia $\mathbf{E}[Y|X] = X$ e $\mathbf{E}[Y^2|X] = X^2$: provare che $Y = X$ q.c.
Esibire viceversa un esempio nel quale si ha $\mathbf{E}[Y|X] = X$ e tuttavia $Y \neq X\,$.

Esercizio 6.6. Sia X una v.a. esponenziale (di parametro λ) e sia $t > 0$: calcolare $\mathbf{E}\big[X\big|X \wedge t\big]\,$.

Esercizio 6.7. (*) Provare la seguente diseguaglianza *tipo Schwartz*:

$$\Big(\mathbf{E}\big[\,XY\big|\mathcal{G}\big]\Big)^2 \leq \mathbf{E}\big[\,X^2\,\big|\mathcal{G}\big]\,\mathbf{E}\big[\,Y^2\,\big|\mathcal{G}\big] \quad \text{q.c.}$$

(*Suggerimento:* ricordare l'Appendice 4.4.1 e la Proposizione 6.1.3.)

Esercizio 6.8. Siano $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ due σ-algebre, sia $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ la σ-algebra generata da $\mathcal{G}$ e da $\mathcal{H}$ e supponiamo che $\mathcal{H}$ sia indipendente dalla σ-algebra generata da X e da $\mathcal{G}$: provare che, se X è integrabile (o a valori positivi), vale l'eguaglianza $\mathbf{E}\big[X\big|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})\big] = \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$.

Esercizio 6.9. Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di v.a. indipendenti integrabili, poniamo $S_n = X_1+\cdots+X_n$ e sia $\mathcal{G}_n = \sigma\big(S_n, S_{n+1}, \ldots\big) = \sigma\big(S_n, X_{n+1}, \ldots\big)$. Provare che vale, per $1 \leq i \leq n$, l'eguaglianza $\mathbf{E}\big[X_i\big|\mathcal{G}_n\big] = \mathbf{E}\big[X_i\big|S_n\big]$; provare inoltre che se le v.a. X_i sono equidistribuite, si ha (sempre per $1 \leq i \leq n$)

$$\mathbf{E}\big[X_i\big|S_n\big] = \frac{S_n}{n}$$

Esercizio 6.10. Sia $(X_1, \ldots, X_n)$ un vettore aleatorio e supponiamo che ogni componente sia di quadrato integrabile: la speranza condizionale $\mathbf{E}\big[X_1\big|\, X_2, \ldots, X_n\big]$ è la proiezione ortogonale di X_1 sul sottospazio di L^2 delle v.a. misurabili rispetto a $\sigma(X_2, \ldots, X_n)$ (cioè della forma $g(X_2, \ldots, X_n)$ con $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ boreliana).
Tuttavia se $(X_1, \ldots, X_n)$ è un *vettore gaussiano* centrato, $\mathbf{E}\big[X_1\big|\, X_2, \ldots, X_n\big]$ coincide con la proiezione ortogonale di X_1 sul sottospazio *lineare* generato dalle variabili $X_2, \ldots, X_n$: provare questa affermazione.

Esercizio 6.11. (*) Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di v.a. indipendenti con legge di *Bernoulli* di parametro 1/2: provare che la legge della variabile

$$Z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\, X_n}{3^n}$$

è la *misura di Cantor.*
(*Suggerimento:* ricordare come si ottiene, con successive approssimazioni, la Funzione di ripartizione della misura di Cantor.)

7 Esercizi relativi al capitolo 7

Esercizio 7.1. Sia $(W_t)_{t\geq 0}$ un Processo di Wiener (con insieme dei tempi $[0, +\infty[$): provare che sono processi di Wiener anche i seguenti processi

a) $c\, W_{t/c^2}$ (con $c \neq 0$)

b) il processo X_t definito da $X_0 = 0$ e $X_t = t\, W_{1/t}$ per $t > 0$

Esercizio 7.2. Se $(W_t)_{t\geq 0}$ è un processo di Wiener, si ha $\lim_{t\to+\infty} \frac{W_t}{t} = 0$ q.c.

Osservazione: Nel provare b) dell'esercizio 7.1, il passaggio più impegnativo è dimostrare che $\lim_{t\to 0+} X_t = 0$ q.c.: si può provare direttamente questo e dedurne l'esercizio 7.2 oppure provare 7.2 e da questo dedurre il punto precedente.

Esercizio 7.3. Sia $(W_t)_{t\geq 0}$ un Processo di Wiener: provare che si ha

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty \text{ q.c.} \qquad\qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = -\infty \text{ q.c.}$$

Dedurne che, preso $x \in \mathbb{R}$, su (quasi) ogni traiettoria il valore x è preso infinite volte.

(*Suggerimento*: vedere l'esercizio 5.9)

Esercizio 7.4. Un processo stocastico $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è detto *processo Gaussiano* se per ogni scelta di $t_1,\dots,t_n$ il vettore $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ è un vettore gaussiano. Provare che la legge del processo è identificata dalla *media* $m(t) = \mathbf{E}[X_t]$ e dalla *covarianza* $c(s,t) = Cov(X_s, X_t)$.

Esercizio 7.5. Sia $(W_t)_{0\leq t\leq 1}$ un processo di Wiener, e sia $L_t = \mathbf{E}[W_t|W_1]$: scrivere esplicitamente L_t.

Sia poi $P_t = (W_t - L_t)$ il cosiddetto *ponte Browniano*: provare che ogni P_t è indipendente da W_1, che $(P_t)_{0\leq t\leq 1}$ è un processo Gaussiano ma non è a incrementi indipendenti.

Esercizio 7.6. Provare che dalla Definizione 7.3.1 segue che le traiettorie del Processo di Poisson hanno q.c. salti di ampiezza 1.
(*Suggerimento:* ci si può limitare all'intervallo di tempo $[0,1]$ e consideriamo, per ogni n,

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \Big\{\omega\in\Omega \,:\, N_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - N_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \geq 2\Big\}$$

Osservare che $\bigcap_{n\geq 1} A_n$ è proprio l'insieme delle traiettorie che hanno almeno un salto di ampiezza superiore o eguale a 2 e calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.)

Esercizio 7.7. Sia S una variabile esponenziale di parametro λ, U una v.a. a indipendente da S e con densità: provare che, se $\mathbf{P}\{U \geq 0\} > 0$, vale l'eguaglianza, per t positivo

$$\mathbf{P}\big\{S \geq U + t \,\big|\, S > U, U \geq 0\big\} = \mathbf{P}\big\{S \geq t\big\} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Osservazione: in realtà l'eguaglianza sopra scritta è vera anche senza supporre che la legge di U abbia densità, ma occorre la nozione di *legge condizionale* che non è stata approfondita in questo corso.

Esercizio 7.8. Assegnato un processo di Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ di intensità λ ed una successione $U_1, U_2, \ldots$ di variabili aleatorie i.i.d., si chiama *Processo di Poisson composto* il processo

$$X_t(\omega) = \sum_{j\leq N_t(\omega)} U_j(\omega) = U_1(\omega) + \cdots + U_{N_t(\omega)}(\omega)$$

(dove si intende che la somma è 0 se $N_t(\omega) = 0$). Più precisamente il processo N_t assegna i *tempi dei salti* e le variabili U_j le *ampiezze dei salti.*

Provare che se le variabili U_j sono integrabili, vale la formula $\mathbf{E}[X_t] = \lambda t\,\mathbf{E}[U_1]$.

Esercizio 7.9. Provare che, assegnato un processo di Poisson, si ha q.c. $\lim_{t\to\infty} N_t = +\infty$; e che se $\mathbf{X}$ è un processo di Poisson composto e le variabili U_j sono integrabili, si ha

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{N_t} = \mathbf{E}[U_1] \text{ q.c.}$$