"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Scritto del 8/1/2000

Esercizio 1. Siano $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ e $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(a) [3 punti] Dimostrare che se $f \in \mathcal{H}(\overline{\Delta})$ allora $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, oppure trovare un controesempio.

(b) [3 punti] Dimostrare che se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_*)$ allora $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, oppure trovare un controesempio.

(c) [3 punti] Dire se esiste $f : \Delta \to \mathbb{C}_*$ olomorfa ed iniettiva.

(d) [3 punti] Descrivere l'insieme delle $f : \mathbb{C}_* \to \Delta$ olomorfe.

(e) [3 punti] Dire se esiste $f : \Delta \to \mathbb{C}_*$ olomorfa e surgettiva. (Suggerimento: ricordare la corrispondenza tra disco e semipiano.)

Esercizio 2. Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x' - x^2 + 2x = 0 \\ x(0) = \lambda. \end{cases}$

(a) [4 punti] Provare che se $0 < \lambda < 2$ allora la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(b) [4 punti] Provare che se $\lambda > 2$ la soluzione è definita su $(-\infty, a)$ per qualche $a \in \mathbb{R}$.

(c) [3 punti] Provare che se $\lambda < 0$ la soluzione è definita su $(b, +\infty)$ per qualche $b \in \mathbb{R}$.

(d) [4 punti] Per $\lambda = -1$, dire dove è definita la trasformata di Laplace (monolaterale) di x.