

Esercizio 1. Siano $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- (a) [3 punti] Dimostrare che se $f \in \mathcal{H}(\overline{\Delta})$ allora $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$, oppure trovare un controesempio.
- (b) [3 punti] Dimostrare che se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_*)$ allora $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$, oppure trovare un controesempio.
- (c) [3 punti] Dire se esiste $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}_*$ olomorfa ed iniettiva.
- (d) [3 punti] Descrivere l'insieme delle $f : \mathbb{C}_* \rightarrow \Delta$ olomorfe.
- (e) [3 punti] Dire se esiste $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}_*$ olomorfa e surgettiva. (Suggerimento: ricordare la corrispondenza tra disco e semipiano.)

Esercizio 2. Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} x' - x^2 + 2x = 0 \\ x(0) = \lambda. \end{cases}$$

- (a) [4 punti] Provare che se $0 < \lambda < 2$ allora la soluzione è definita su tutto \mathbb{R} .
- (b) [4 punti] Provare che se $\lambda > 2$ la soluzione è definita su $(-\infty, a)$ per qualche $a \in \mathbb{R}$.
- (c) [3 punti] Provare che se $\lambda < 0$ la soluzione è definita su $(b, +\infty)$ per qualche $b \in \mathbb{R}$.
- (d) [4 punti] Per $\lambda = -1$, dire dove è definita la trasformata di Laplace (monolaterale) di x .

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente formule ed enunciati. Consegnando lo scritto si perde il diritto a ottenere la registrazione del voto conseguito nei quiz. Se si consegna lo scritto e la media dei voti di quiz e scritto è meno di 16, bisogna ripetere il quiz.
