UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

cherubino
cherubino
cherubino
cherubino
cherubino

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 8/1/2000

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con bordo ∂S, e sia ω una 1-forma su $\mathbb{R}^3$ tale che $\omega = 0$ su ∂S. Si può concludere che $\int_S \mathrm{d}\omega = 0$? [V] / [F]

2. Sia $f_n(t) = \mathrm{e}^{n(it-n)}$ per $t \in [0,1]$. Sono soddisfatte per la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ le ipotesi del criterio di derivabilità termine a termine? [V] / [F]

3. Siano $x, y, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni con derivata continua. Sia $x'(t) = f(x(t))$ e $y'(t) = f(y(t))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $x(0) < y(0)$. Si può concludere che $x(t) < y(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$? [V] / [F]

4. La serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\mathrm{e}^{in}+2n^3} z^n$ converge su tutto $\mathbb{C}$? [V] / [F]

5. La singolarità in $z = 0$ della funzione $\sin(1/z) - 1/z$ è eliminabile? [V] / [F]

6. È vero che se $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ è continua e limitata allora la sua trasformata di Laplace è definita su tutto $\mathbb{C}$? [V] / [F]

7. Sia $f(x, y) = \sqrt{1 + y^2}$ e $\alpha(t) = (t, \mathrm{e}^t)$ per $t \in [0, 1]$. Quanto fa $\int_\alpha f$?
[a] $1/2 + \mathrm{e}^2$; [b] $(1 + \mathrm{e}^2)^{1/2}$; [c] $(1 + \mathrm{e}^2)/2$; [d] $1 + \mathrm{e}^2/2$.

8. La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x, y, z) = (\mathrm{e}^{y^2+x-z}, \mathrm{e}^z \cdot \cos(x) \cdot \cos(y), \mathrm{e}^y)$
[a] ha inversa C^1 su tutto $\mathbb{R}^3$; [b] ha inversa non C^1 su tutto $\mathbb{R}^3$;
[c] ha inversa locale C^1 nell'intorno di $(0, 0, 0)$; [d] ha inversa locale non C^1 nell'intorno di $(0, 0, 0)$.

9. Come si comportano nell'intorno di $(0, 0)$ le soluzioni $t \mapsto (x(t), y(t))$ del sistema $\begin{cases} x' = x^2 + \sin(y) \\ y' = \sin(x + y) \end{cases}$?
[a] tendono tutte ad avvicinarsi a $(0, 0)$; [b] tendono tutte ad allontanarsi da $(0, 0)$;
[c] sono tutte periodiche; [d] nessuna delle precedenti.

10. Sia $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una successione tale che per ogni n si abbia $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$, ed inoltre $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$. Quanto fa a_{100}? [a] 0; [b] 2; [c] 1; [d] -1.

11. Se $f(z) = 1/\cos(z)$, quanto fa $\int_{\partial\Delta(0,2)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z$? [a] $-i\pi$; [b] $-4i\pi$; [c] $i\pi$; [d] $4i\pi$.

12. Se $f(t) = \mathrm{e}^{3it/2}$, quale affermazione sui coefficienti di Fourier $(\alpha_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ di f è giusta?
[a] sono tutti nulli; [b] tutti meno uno sono nulli;
[c] sono tutti reali; [d] sono tutti immaginari puri.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono ± 2 punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

Risposte esatte

1. V
2. V
3. V
4. F
5. F
6. F
7. c
8. c
9. d
10. a
11. b
12. c