"Geometria e Algebra" – A.A. 1999/2000 – Scritto del 2/9/00

Esercizio 1. Dato un parametro reale k si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} k^2-1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} k \\ k-1 \\ k^2-1 \end{pmatrix}.$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si dica:

(A) [5 punti] se esiste una applicazione lineare f tale che $f(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$;

(B) [3 punti] se ne esiste una iniettiva;

(C) [2 punti] se ne esiste una surgettiva.

(D) [3 punti] Nel caso $k = 2$ si esibisca una applicazione f come nel punto (A) scrivendone la matrice associata a due basi a scelta di $\mathbb{R}^3$. Si dica inoltre se tale applicazione è unica.

(E) [2 punti] Si dica se l'insieme di tutte le f ottenute come nel punto (A) al variare di k in $\mathbb{R}$ sia un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

Esercizio 2. Si considerino in $\mathbb{R}^2$ i vettori $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1)$, e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x, y, z) = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + z \cdot v_3$.

(A) [2 punti] Si verifichi che f è lineare.

Per $k \in \mathbb{R}$ sia $\pi_k \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\pi_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z = k\}$ e sia f_k la restrizione di f a π_k.

(B) [4 punti] Si dica per quali k la f_k risulta bigettiva tra π_k e $\mathbb{R}^2$.

(C) [3 punti] Si descriva nel piano $\mathbb{R}^2$ l'immagine tramite f dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z = 1, \; x, y, z \geq 0\}.$$

(D) [3 punti] Si trovi un punto p di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(p)$ sia il baricentro del triangolo di vertici v_1, v_2, v_3.

(E) [3 punti] Si dica se per ogni $k, h \in \mathbb{R}$ esista una applicazione lineare $g_k^h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f_k = f_h \circ g_k^h$

Esercizio 3. Per ogni $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ si indichi con f_M la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ associata ad M, cioè quella definita da $f_M(x,y) = {}^t x \cdot M \cdot y$. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(A) [4 punti] Si dimostri che f_A non è un prodotto scalare.

(B) [2 punti] Detta $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ si dimostri che f_{BA} è un prodotto scalare.

(C) [3 punti] Si scriva una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto ad f_{BA}.

(D) [4 punti] Si caratterizzino tutte le matrici C tali che f_{CA} sia una forma bilineare simmetrica.

(E) [2 punti] Si caratterizzino tutte le matrici D tale che f_{DA} sia un prodoto scalare.

Esercizio 4. Sia $X = \mathbb{R}_{\leq 4}[t]$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo f_k di X definito da

$$f_k(p(t)) = p(t) + k \cdot (1+t) \cdot p'(t) + (1+t^2) \cdot p''(t),$$

dove l'apice indica l'operazione di derivazione.

(A) [4 punti] Si esibisca la matrice di f_k rispetto ad una base a scelta di X.

(B) [3 punti] Si trovino i valori di k per i quali f_k ha tutti gli autovalori tra loro distinti.

(C) [4 punti] Si scelga un valore di k per il quale f_k abbia un autovalore doppio, e si determini la forma canonica di f_k.

(D) [4 punti] Si scelga un valore di k per il quale f_k abbia un autovalore triplo, e si determini la forma canonica di f_k.

L'esercizio 4 è riservato agli studenti che sostengono l'esame annuale (a.a. 1998/1999). Questi studenti devono inoltre risolvere due a scelta dei primi tre esercizi. Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.