"Geometria e Algebra" – A.A. 1999/2000 – Scritto del 27/5/00

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia $W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e sia $U_k = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1-k \end{pmatrix} \right\}$, ove k è un parametro reale.

(A) [3 punti] Calcolare la dimensione di W ed esibirne una base.

(B) [3 punti] Calcolare la dimensione di U_k al variare di k in $\mathbb{R}$.

(C) [3 punti] Calcolare le dimensioni di $W \cap U_k$ e di $W + U_k$ al variare di k in $\mathbb{R}$.

(D) [3 punti] Per $k = 1$ trovare una base di U_1, esibire un vettore di base per $W \cap U_1$ e calcolarne le coordinate sia nella base di U_1 sia in quella di W scelta nel punto (A).

(E) [3 punti] Verificare se $S = \{U_k : \ k \in \mathbb{R}\}$ con le operazioni

$$U_k + U_{k'} = \operatorname{Span}\{U_k, \ U_{k'}\}$$

$$\alpha U_k = U_{\alpha k} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

è uno spazio vettoriale.

Esercizio 2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e sia $\langle \,.\,|\,.\, \rangle_A$ la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ associata ad A.

(A) [3 punti] Si dimostri che $\langle \,.\,|\,.\, \rangle_A$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(B) [3 punti] Si trovi una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a $\langle \,.\,|\,.\, \rangle_A$.

(C) [3 punti] Si trovi una seconda base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a $\langle \,.\,|\,.\, \rangle_A$, in modo che nessun vettore della prima base appartenga alla seconda. Inoltre si scrivano le coordinate dei vettori della prima base scelta rispetto alla seconda.

(D) [3 punti] Detta B la matrice del cambiamento di coordinate dalla prima base alla seconda, si verifichi che $B^{-1} = {}^{t}B$.

(E) [3 punti] Si dimostri o si neghi con un controesempio la seguente affermazione: *per* $C \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *vale* $C^{-1} = {}^{t}C$ *se e solo se le sue colonne formano una base ortononormale di* $\mathbb{R}^3$ *rispetto a* $\langle \,.\,|\,.\, \rangle_A$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ sia $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $f_{\alpha,\beta}(z) = \alpha z + \beta$.

(A) [3 punti] Si dica se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tali che $f_{\alpha,\beta}(1) = 1 + i$ e $f_{\alpha,\beta}(i) = 2i - 1$.

(B) [3 punti] Si dica se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tali che $f_{\alpha,\beta}(\bar{z}) = \overline{f_{\alpha,\beta}(z)}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

(C) [3 punti] Si dica se l'insieme $V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \ f_{\alpha,\beta}(\bar{z}) = \overline{f_{\alpha,\beta}(z)} \text{ per ogni } z \in \mathbb{C} \right\}$ sia uno spazio vettoriale complesso, e se sì se ne calcoli la dimensione su $\mathbb{C}$.

(D) [2 punti] Si dica se V è uno spazio vettoriale reale, e se sì se ne calcoli la dimensione su $\mathbb{R}$.

(E) [2 punti] Fissato $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica se $U_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \ f_{\alpha,\beta}(z) = 0 \right\}$ sia uno spazio vettoriale complesso, e se sì se ne calcoli la dimensione su $\mathbb{C}$.

(F) [2 punti] Si dica se $W = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \ f_{\alpha,\beta}(z) = 0 \right\}$ sia uno spazio vettoriale complesso, e se sì se ne calcoli la dimensione su $\mathbb{C}$.

Esercizio 4. Nello spazio V delle funzioni infinitamente derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, si considerino i vettori u_i, per $i = 1, \ldots, 4$, definiti da:

$$u_1(t) = \cos(t), \quad u_2(t) = \sin(t), \quad u_3(t) = \cos(2t), \quad u_4(t) = \sin(2t).$$

Si ponga $U = \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_4)$. Si consideri inoltre l'endomorfismo f di V definito da $f(v)(t) = v'(-t) + v(t)$, dove v' rappresenta la derivata di v.

(A) [5 punti] Si dimostri che $f(U) \subset U$

(B) [5 punti] Si dimostri che U ha dimensione 4.

(C) [5 punti] Sia g l'endomorfismo di U definito dalla restrizione di f. Si descriva la forma canonica di g.

L'esercizio 4 è riservato agli studenti che sostengono l'esame annuale (a.a. 1998/1999). Questi studenti devono inoltre risolvere due a scelta dei primi tre esercizi. Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.