UNIVERSITÀ DI PISA

IN SUPREMÆ DIGNITATIS · 1343

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile Ambientale e Edile

Geometria e Algebra Lineare / Geometria — Scritto del 23/7/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazi $W = \mathrm{Span}(-e_1 + 2e_3,\ e_2 - e_3 + e_4)$ e $Z = \mathrm{Span}(e_1 + e_4,\ 2e_2 - e_4)$. Provare che $\mathbb{R}^4 = W \oplus Z$ e calcolare la proiezione su W del vettore $2e_1 - 5e_2 + 7e_3 + 2e_4$.

2. Se $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ e $p_A(1-3i) = p_A(2+i) = 0$ si può concludere che A è diagonalizzabile oppure che non lo è? Spiegare.

3. Ortonormalizare la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ di $\mathbb{R}^3$.

4. Provare che esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 3i & 2+i \\ -2+i & -i \end{pmatrix}$ ed esibire una tale base insieme ai corrispondenti autovalori.

5. Trovare un'equazione della parabola costituita dai punti di $\mathbb{R}^2$ equidistanti dal punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e dalla retta di equazione $x + y = 3$.

6. Determinare il tipo proiettivo della quadrica
$\{[x:y:z:w] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) :\ x^2 + 3y^2 + 4xy + 2xw - 2yz - 6zw = 0\}$.

7. Provare che l'equazione $\sin(2x - 3y) = 5x - 2y$ definisce nell'intorno di $0 \in \mathbb{R}^2$ una curva γ, e determinare un vettore non nullo tangente a γ in tale punto.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} t+7 & t+1 & 2\,(t-2) \\ t+1 & t+7 & 2\,(t-2) \\ 2\,(t-2) & 2\,(t-2) & 2\,(2t+2) \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che esiste per ogni t una $Q \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che $Q^{-1} \cdot M \cdot Q$ è diagonale.

(B) (2 punti) Provare che M ha determinante $432t$.

(C) (3 punti) Sapendo che M ha sempre l'autovalore $\lambda_1 = 6$ trovare gli altri.

(D) (2 punti) Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_M$ è un prodotto scalare.

(E) (3 punti) Per $t = 0$ esibire una Q come nel punto (A).

(F) (1 punto) Verificare che, per la Q del punto (E), la condizione del punto (A) vale per ogni t.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s^2 - s \\ \log(1+2s^2) \\ s \cdot \mathrm{e}^{3s} \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che α è regolare.

(B) (4 punti) Determinare il riferimento di Frenet di α nel punto $s = 0$.

(C) (3 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\displaystyle\int_\beta z\,\mathrm{d}x$ dove β è la restrizione di α a $[0,1]$.

(E) (1 punto) Provare che α è semplice.

Risposte ai quesiti

1. La matrice che ha come colonne i generatori assegnati di W e Z ha determinante $8 \neq 0$;
$-2e_1 - 3e_2 + 7e_3 - 3e_4$

2. Lo è: è una 2×2 e ha 2 autovalori distinti

3. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

4. È anti-hermitiana; $\lambda_1 = 4i,\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2+i \\ i \end{pmatrix},\ \lambda_2 = -2i,\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ 2-i \end{pmatrix}$

5. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 6y = 1$

6. Ellissoide proiettivo (equazione canonica $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$)

7. Posto $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5x - 2y - \sin(2x - 3y)$ si ha $f(0) = 0$ e $Jf(0) = (3\ 1)$; vettore tangente $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Soluzioni degli esercizî

1.

(A) M è simmetrica per ogni t

(B) Sostituendo la prima riga con sé stessa meno la seconda e poi la seconda colonna con sé stessa più la prima si conclude con facili calcoli

(C) $\lambda_2 = 12,\ \lambda_3 = 6t$

(D) $t > 0$

(E) $Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(F) Calcoli

2. Chiamiamo X, Y, Z le componenti di α

(A) $X'(s) = 0$ solo per $s = \frac{1}{2}$, ma $Y'(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ n = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ b = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = 2\sqrt{3},\ \tau = -\frac{9}{8}$

(D) $\frac{1}{27}(4\,\mathrm{e}^3 - 7)$

(E) Se $X(s') = X(s)$ con $s' \neq s$ allora $s' = 1 - s$ con $s \neq \frac{1}{2}$. Se inoltre $Y(s') = Y(s)$ si ha anche $(1-s)^2 = s^2$, da cui $s = \frac{1}{2}$, assurdo