UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile Ambientale e Edile

Geometria e Algebra Lineare / Geometria — Scritto del 2/7/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Posto $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ e $Z = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ calcolare la proiezione su W di $\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ rispetto alla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$.

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitari, ortogonali a $\begin{pmatrix}5\\6\\-2\end{pmatrix}$ e aventi somma delle componenti nulla.

3. Calcolare le matrici jacobiana e hessiana nel punto $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = y \cdot \log(1+2x) + \mathrm{e}^{3x-y}$ nonché i segni degli autovalori della seconda.

4. Trovare tutti i $v \in \mathbb{C}^2$ con $\|v\| = 1$, $v_1 + v_2 \in i \cdot \mathbb{R}$, $v \perp \begin{pmatrix}1-i\\2+i\end{pmatrix}$.

5. Provare che la matrice $\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & -3\end{pmatrix}$ è ortogonale e che rappresenta una riflessione, quindi determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

6. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare il tipo affine della conica di equazione
$(t-1)x^2 + 12xy + (t+4)y^2 + 4x = 0$.

7. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per i punti $[3 : -2 : t+1]$ e $[t-1 : -4 : 3]$ contiene il punto $[5 : 2 : 6]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Geometria e Algebra Lineare / Geometria — Scritto del 2/7/25 — Esercizî

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} t^2-2 & t-1 & t \\ t^2-t & 2t-4 & t-1 \\ -t^2+3t-1 & -5t+5 & -2t+1 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Per $t = -1$ esibire la matrice della proiezione ortogonale sull'immagine di M.

(B) (2 punti) Verificare che $\det(M) = -t^4 + 4t^2 - 3$.

(C) (3 punti) Sapendo che M ha sempre l'autovalore $t^2 - 3$ trovare gli altri due.

(D) (4 punti) Determinare al variare di $t \in \mathbb{R}$ le molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori di M stabilendo se essa sia o meno diagonalizzabile.

2. Considerare la curva parametrizzata $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 8t^3 \\ \cos(\pi \cdot t) + t^2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che α è semplice.

(B) (1 punto) Provare che α non è regolare ma che le sue restrizioni a $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ lo sono.

(C) (1 punto) Verificare che il supporto di α è il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dedurre dall'espressione di f che non è possibile riparametrizzare il supporto di α tramite una curva regolare.

(D) (3 punti) Trovare i punti $\alpha\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ e calcolare la curvatura di α in tali punti.

(E) (2 punti) Provare che esistono infiniti punti in cui la curvatura di α è positiva e infiniti in cui è negativa.

(F) (1 punto) Sapendo che la seconda componente di α è positiva su $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ provare che se β è la restrizione di α a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ allora $-\int_\beta x\,\mathrm{d}y$ e $\int_\beta y\,\mathrm{d}x$ sono uguali all'area di una medesima regione di piano, e pertanto sono uguali tra loro.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile Ambientale e Edile

Geometria e Algebra Lineare / Geometria — Scritto del 2/7/25 — Quesiti

Risposte ai quesiti

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{114}}\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $J = (3, -1),\ H = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; positivi

4. $\pm\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} -3+4i \\ 3+i \end{pmatrix}$

5. Le colonne sono unitarie e ortogonali tra loro, e il determinante vale -1
$\left(\begin{pmatrix} 3+\sqrt{13} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-\sqrt{13} \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

6. Degenere per $t = -4$
ellisse per $t < -8$ e $t > 5$
parabola per $t = -8$ e $t = 5$
iperbole per $-8 < t < -4$ e $-4 < t < 5$

7. $t = 3$ e $t = -19$

Soluzioni degli esercizî

1.

(A) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 2 & 2 & -2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$

(B) Eseguendo i passaggi

- $R_2 \to R_2 - R_1$ e $R_3 \to R_3 + R_1$
- raccogliere $t-1$ da R_3
- $C_1 \to C_1 + 3C_3$ e $C_2 \to C_2 - 4C_3$
- sviluppare lungo R_3
- raccogliere $1+t$ da R_2
- $C_1 \to C_1 + C_2$

si trova $(1-t)(1+t)(t^2-3) = -t^4+4t^2-3$

(C) $t-1$ e $-1-t$

(D)
- Per $t \neq -2,-1,0,1,2$ autovalori $t^2-3,\ t-1,\ -t-1$ con m.a. = m.g. = 1; diagonalizzabile
- Per $t=-2$ autovalore -3 con m.a. = m.g. = 1 e autovalore 1 con m.a. = 2 e m.g. = 1; non diagonalizzabile
- Per $t=-1$ autovalore 0 con m.a. = m.g. = 1 e autovalore -2 con m.a. = m.g. = 2; diagonalizzabile
- Per $t=0$ autovalore -3 con m.a. = m.g. = 1 e autovalore -1 con m.a. = 2 e m.g. = 1; non diagonalizzabile
- Per $t=1$ autovalore 0 con m.a. = m.g. = 1 e autovalore -2 con m.a. = m.g. = 2; diagonalizzabile
- Per $t=2$ autovalore -3 con m.a. = m.g. = 1 e autovalore 1 con m.a. = 2 e m.g. = 1; non diagonalizzabile

2. Chiamiamo X e Y le componenti di α

(A) X è crescente

(B) $X'(t) = 0$ solo per $t = 0$ e $Y'(0) = 0$

(C) $X^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(x)} \;\Rightarrow\; f = Y \circ X^{-1}$; poiché $f'_{\pm}(0) = \mp\infty$ il supporto di α ha una cuspide in $\alpha(0)$

(D) $\alpha\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\kappa\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{12(2\pi-1)}{(37-2\pi+\pi^2)^{3/2}}$

(E) $\kappa(t)$ è concorde con

$$\det(\alpha'(t)\ \alpha''(t)) = -24t^2(\pi^2\cos(\pi \cdot t) + 2) + 48\pi \cdot t \cdot \sin(\pi \cdot t)$$

che per $n \in \mathbb{Z}$ non nullo vale $-24n^2 \cdot ((-1)^n \cdot \pi^2 + 2)$ che è discorde con $(-1)^n$ poiché $\pi^2 > 2$

(F) Se $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ per $t \in [-1, 1]$ si ha che β e γ hanno gli stessi estremi. L'informazione fornita comporta che la regione di piano Ω compresa tra i supporti di β e γ ha bordo $\partial\Omega = \gamma \cup (-\beta)$. Ora l'area di Ω si può calcolare come l'integrale su $\partial\Omega$ di $x\,\mathrm{d}y$ oppure di $-y\,\mathrm{d}x$, dunque vale

$$\int_\gamma x\,\mathrm{d}y - \int_\beta x\,\mathrm{d}y = -\int_\gamma y\,\mathrm{d}x + \int_\beta y\,\mathrm{d}x,$$

ma i due integrali su γ sono nulli (il primo perché è nullo $\mathrm{d}y$, il secondo perché è nullo y)