UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile Ambientale e Edile

Geometria e Algebra Lineare / Geometria — Scritto del 12/6/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ trovare $p_A(t) = t^3 + \dots$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = -3,\ \det(A) = -7,\ p_A(1) = 6.$

2. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ risulta diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} t^2 - t + 2 & t - 2 \\ t^2 - 4 & 4 \end{pmatrix}$.

3. In $\mathbb{R}^3$ calcolare la proiezione ortogonale di $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sul piano di equazione $3x - 4y + 2z = 0.$

4. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che
$${}^{\mathrm{t}}M \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -2 \\ -\sqrt{3} & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $y^2 - z^2 + 2xy - 2xz + 6x + 4y - 2z = 0.$

6. Calcolare $\displaystyle\int_\alpha xy$ dove $\alpha : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$.

7. Calcolare $\displaystyle\int_{\partial Q} \left(\sin\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x + \left(x^2 + \mathrm{e}^{\cos(y)}\right)\,\mathrm{d}y\right)$ con $Q = [0,1] \times [0,1].$

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile Ambientale e Edile

Geometria e Algebra Lineare / Geometria — Scritto del 12/6/25 — Esercizî

1. Considerare i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ e, al variare di $t \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t-1 & 1 \\ 2+3t-t^2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(A) (2 punti) Ortonormalizzare la coppia di vettori (v, u) rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$.

(B) (3 punti) Provare che esistono due valori $t_0 < t_1$ di t per cui esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

(C) (2 punti) Per $t = t_1$ determinare i segni degli autovalori di A.

(D) (2 punti) Per $t = t_0$ provare che $\langle v|w\rangle_A = {}^{\mathrm{t}} v \cdot A \cdot w$ definisce un prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ su $\mathbb{R}^3$.

(E) (3 punti) Trovare un vettore w non nullo di $\mathbb{R}^3$ ortogonale al vettore v sia rispetto al prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ del punto precedente sia rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \sin(2s) \\ s^3 - 3s \\ \log(1+s+s^2) \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che α è regolare.

(B) (4 punti) Determinare il riferimento di Frenet di α nel punto $s = 0$.

(C) (3 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

(D) (2 punti) Calcolare $\displaystyle\int_\beta x\,\mathrm{d}y$ dove β è la restrizione di α a $[0, \pi]$.

(E) (2 punti) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma z\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$ dove γ è la restrizione di α a $[0, 1]$.

Deve essere esibita la tessera dello studente. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. $t^3 + 3t^2 - 5t + 7$

2. $t \neq -3$

3. $\frac{1}{29}\begin{pmatrix} -2 \\ 51 \\ 105 \end{pmatrix}$

4. $k = \pm 4$

5. Paraboloide iperbolico

6. $\frac{14}{9}$

7. 1

Soluzioni degli esercizî

1.

(A) $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{138}}\begin{pmatrix}5\\-7\\8\end{pmatrix}\right)$

(B) $t_0 = -1$, $t_1 = 3$

(C) Due positivi e uno negativo

(D) $d_1, d_2, d_3 > 0$

(E) $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

2.

(A) La derivata della seconda componente di α si annulla solo per $s = \pm 1$, ma per $s = \pm 1$ non si annulla la derivata della terza componente di α

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix},\ n = \frac{1}{\sqrt{854}}\begin{pmatrix}22\\-9\\17\end{pmatrix},\ b = \frac{1}{\sqrt{61}}\begin{pmatrix}-3\\4\\6\end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{\sqrt{61}}{14\sqrt{14}},\ \tau = -\frac{24}{61}$

(D) $\frac{3}{5}\pi^5 - \pi^3 + \frac{3}{2}\pi^2$

(E) $-2\log(3)$