UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I / **Parte I** — Scritto del 13/2/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Dire con quale coefficiente compare il monomio x^2y^3 nello sviluppo della potenza $(x+y)^5$.

2. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{1+n!}$.

3. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2x+1)\tan\left(\frac{3x}{x^2-5}\right)$.

4. Provare che per la funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2 + \sin(\pi \cdot x)$ esiste $c \in (-1,1)$ tale che $f'(c) = 0$.

5. Calcolare la derivata dell'espressione $f(x) = \arcsin(x^2)$ specificando dove è definita.

6. Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $f : [3,9] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2 + \log_3(x)$ si trova $c \in (3,9)$ tale che $f'(c) = \ldots$

7. Dire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \mathrm{e}^{x^3-2x}$ sia concava o convessa su un intervallo sufficientemente piccolo contenente il punto $x = -1$. Giustificare la risposta.

8. Calcolare, se esiste $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} 3^{-n}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Non si possono usare calcolatrici di alcun tipo. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante tutta la prova si possono consultare solo i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\quad f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$.

(A) (1 punto) Provare che f è dispari.

(B) (1 punti) Calcolare i limiti di f in $\pm\infty$

(C) (4 punti) Trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f e i suoi punti di massimo e minimo relativo e assoluto.

(D) (3 punti) Trovare gli intervalli di concavità e convessità e i punti di flesso di f.

Risposte ai quesiti

1. 10

2. 0

3. 6

4. f è continua e derivabile sull'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$ e $f(-1) = f(1)$, dunque si applica il teorema di Rolle

5. $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ per $x \in (-1, 1)$

6. $\frac{73}{6}$

7. Concava poiché $f''(-1) = -5 \, \text{e} < 0$

8. $\frac{1}{6}$

Soluzione dell'esercizio

(A) $f(-x) = (-x) \cdot \mathrm{e}^{-(-x)^2} = -x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} = -f(x)$

(B) $0^{\pm}$

(C) Crescente su $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, minimo relativo e assoluto nel primo estremo, massimo relativo e assoluto nel secondo estremo, decrescente su $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e su $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$

(D) Concava su $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ e su $\left[0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, convessa su $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right]$ e su $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, punti di flesso 0 e $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$