UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 13/2/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Calcolare $\displaystyle\int \log(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

2. Calcolare $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x-1}\,\mathrm{d}x$.

3. Date A e B matrici 2×2 con $\det(A)=1$ e $\det(B)=2$ calcolare

$$\det(A\cdot B)+\det(3B\cdot A^{-1})-\det(2I_2)$$

(dove I_2 è la matrice identità 2×2.)

4. Determinare le coordinate del vettore $v=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ rispetto alla base (w_1,w_2,w_3) di $\mathbb{R}^3$, con $w_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $w_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $w_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

5. Stabilire se l'applicazione lineare $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita da $F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\x+y-z\\y+z\end{pmatrix}$ sia iniettiva e/o surgettiva.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y'=\dfrac{\cos(\frac{x}{2})}{3y}$ che soddisfa $y(\pi)=1$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato dopo i primi 45 minuti. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 13/2/24 — Esercizio

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & -k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(A) (2 punti) Determinare i valori di k per cui la matrice A è invertibile.

(B) (2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A in funzione dal parametro k.

(C) (1 punto) Per $k = 0$ trovare gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche.

(D) (3 punti) Per $k = 0$ determinare una base di ciascun autospazio di A e dire se essa sia diagonalizzabile.

(E) (1 punto) Per $k = -1$ dire se A sia diagonalizzabile.

Risposte ai quesiti

1. $x \cdot \log(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x) + c$

2. $\frac{7}{2} + \log(2)$

3. 16

4. $v = -2w_1 + 3w_2$, dunque le coordinate sono $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dunque F non è iniettiva;

$\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, dunque F non è surgettiva.

In realtà, da ciascuno dei due fatti segue l'altro

6. $y = \sqrt{\frac{4}{3}\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3}}$

Soluzione dell'esercizio

(A) Nessuno

(B) $P_A(t) = -t(t^2 - 4t + k + 4)$

(C) $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2

(D) $V_1 = \text{Span}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; non diagonalizzabile

(E) Sì perché ha gli autovalori distinti 0, 1 e 3