UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 3/2/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Dimostrare per assurdo che $\frac{4}{3} - \frac{7}{2} \cdot \sqrt{2}$ non è un numero razionale. Supporre noto che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

2. Calcolare la molteplicità della radice $z = i$ per il polinomio $2iz^4+7z^3+(1-7i)z^2-(1+2i)z-(1+i)$.

3. Calcolare, se esite $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$.

4. Disporre dall'ordine più basso a quello più alto di infinito per $x \to +\infty$ le seguenti funzioni:

$$\mathrm{e}^x \qquad \sqrt{x} \qquad \log(1+x^3) \qquad \tfrac{x^3}{x+1} \qquad 2^x.$$

5. Considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 2x + \sin(x)$. Verificare che f è invertibile con inversa derivabile, provare che $f(0) = 0$ e calcolare $(f^{-1})'(0)$

6. Dire se la regola di de l'Hôpital si applica al limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{\log(1+x^8)}$ e calcolarne il valore.

7. Dire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2+\cos(3x)$ sia concava o convessa su un intervallo aperto contenente 0 (piccolo a piacere).

8. Dire se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ sia convergente.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 3/2/25 — Esercizio

Considerare l'espressione $\quad f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{|x| - 1}.$

(A) (1 punto) Trovare il più grande insieme $I \subset \mathbb{R}$ tale che essa definisce una funzione $f : I \to \mathbb{R}$.

(B) (3 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi di I e determinare i suoi asintoti.

(C) (2 punti) Dire se esistono punti x_0 di I in cui $f'(x_0)$ non esiste e calcolare, se esistono, $f'_{\pm}(x_0)$.

(D) (3 punti) Trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f e i suoi punti di minimo e massimo relativo.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. Se $\frac{4}{3} - \frac{7}{2} \cdot \sqrt{2} = q \in \mathbb{Q}$ allora $\sqrt{2} = \frac{2}{7}\left(\frac{4}{3} - q\right)$, ma quest'ultimo è un numero razionale

2. 2

3. 1

4. $\log(1 + x^3)$ $\quad \sqrt{x}$ $\quad \frac{x^3}{x+1}$ $\quad 2^x$ $\quad \mathrm{e}^x$

5. f è continua e derivabile; inoltre è strettamente crescente perché ha derivata prima strettamente positiva (dunque non nulla) e $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, da cui segue che è invertibile con inversa derivabile; $f(0) = 0 + 0 = 0$; infine $\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$

6. Sì, è una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; vale $-\infty$

7. Concava

8. Sì, per il criterio del rapporto tra il termine generico e il successivo, che tende a $\frac{1}{2}$

Soluzione dell'esercizio

(A) $I = (-\infty, -1) \cup (-1, +1) \cup (+1, +\infty)$

(B) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$,
$\lim_{x\to+1} f(x) = +5$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
asintoto obliquo sinistro $y = -x-2$, asintoto verticale $x = -1$, asintoto obliquo destro $y = x+4$ (con cui f coincide per $x > 0$ e $x \neq 1$, dunque f si estende con continuità nel punto $x = 1$)

(C) $x_0 = 0$, $f'_-(0) = -7$, $f'_+(0) = 1$

(D) Decrescente su $(-\infty, -1)$ e su $(-1, 0]$; crescente su $[0, +1)$ e su $(+1, +\infty)$; minimo relativo nel punto $x = 0$