UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 10/5/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Calcolare $\displaystyle\int_T x^2 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ dove $T \subset \mathbb{R}^2$ è il triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

2. Esibire una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $3x - 2y + z = 0$.

3. Calcolare $\displaystyle\int_1^2 (x + 1) \log(x) \, \mathrm{d}x$.

4. Calcolare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 5 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ giustificando la risposta.

5. Risolvere il sistema lineare $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 + x_4 = -1 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

6. Esibire gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato dopo i primi 45 minuti. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 10/5/24 — Esercizio

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Calcolare $f\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(B) (2 punti) Calcolare la dimensione di $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

(C) (2 punti) Esibire il polinomio caratteristico di A.

(D) (2 punti) Trovare gli autovalori di A verificando che essa è diagonalizzabile.

(E) (2 punti) Esibire $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ invertibile tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ sia diagonale.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 10/5/24 — Quesiti

Risposte ai quesiti

1. $\frac{1}{30}$

2. Ad esempio $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. $4\log(2) - \frac{7}{4}$

4. 2; se $v_1, \ldots, v_4$ sono le colonne della matrice si ha che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, mentre $v_3 = 3v_1 - v_2$ e $v_4 = -v_1 - 2v_2$

5. $\begin{cases} x_1 = -t - 1 \\ x_2 = 4t + 8 \\ x_3 = 3t + 4 \\ x_4 = t \end{cases}$

6. $\lambda_1 = 3,\ \lambda_1 = -5,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Soluzione dell'esercizio

(A) $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}$

(B) 1 e 2

(C) $P_A(t) = t^3 - 7t^2 + 10t = t(t-2)(t-5)$

(D) Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 5$; poiché sono distinti la A è diagonalizzabile

(E) Ad esempio $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$