UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 25/1/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dire quanto vale l'estremo inferiore s dell'insieme $\{\frac{1}{n^2+1} : \ n \in \mathbb{N}\}$.
Provare formalmente che lo è e dimostrare che non è un minimo.

2. Calcolare modulo e argomento del numero complesso $z = 3\sqrt{2} - i\sqrt{6}$

3. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$.

4. Calcolare, dove esiste, la derivata della funzione $x \mapsto \arctan(\log(x))$.

5. Determinare l'ordine di 0 in $x = 0$ della funzione $f(x) = \log(1 + x^2) \cdot (\cos(x^3) - 1)$.
(L'ordine di 0 in 0 di f è il naturale k tale che $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^k}$ esiste finito non nullo.)

6. Verificare che la regola di de l'Hôpital si applica a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 3x}{\log(x) - 7}$ e calcolarne il valore.

7. Dire se la funzione $x \mapsto \sin(2x) - \cos(3x)$ sia concava o convessa su un intervallo contenente $-\frac{\pi}{4}$.

8. Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - (-1)^n}$ sia convergente, spiegando perché.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x - 2\cos(x)$.

(A) (1 punto) Calcolare i limiti di f in $\pm\infty$ e dire se essa abbia asintoti.

(B) (3 punti) Trovare tutti i punti di massimo e di minimo relativo di f e i valori di f in tali punti.

(C) (2 punti) Determinare gli intervalli di concavità e di convessità di f.

(D) (2 punti) Provare che esistono punti $x \in \mathbb{R}$ in cui $f(x) = f'(x)$.

(E) (1 punto) Provare che f ha uno e un solo zero. [Suggerimento: sfruttare il punto (B).]

Risposte ai quesiti

1. $s = 0$; poiché $\frac{1}{n^2+1} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ non può essere un minimo, e per mostrare che è l'estremo inferiore basta vedere che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon$; questa disuguaglianza equivale a $n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ dunque vale per n abbastanza grande

2. $|z| = 2\sqrt{6}, \ \arg(z) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

3. $\frac{3}{2}$

4. $\frac{1}{x \cdot \left(1 + \log^2(x)\right)}$ per $x > 0$

5. $k = 8$

6. Si tratta di una forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$; derivando numeratore e denominatore si trova $\frac{2x+3}{\frac{1}{x}} = 2x^2 + 3x$ che ha limite $+\infty$, e dunque anche il limite originale vale $+\infty$

7. Concava poiché $f''(-\frac{\pi}{4}) = 4 - \frac{9}{\sqrt{2}} < 0$

8. Tranne che per $n = 0$ il termine generico a_n della serie è positivo, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = 1$, e sappiamo che $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

Soluzione dell'esercizio

(A) Limiti $\pm\infty$ in $\pm\infty$ dunque f non ha asintoti orizzontali. Non ne ha nemmeno di obliqui perché $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ma $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x)$ non esistono

(B) Massimi relativi in $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ con valore $-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi + \sqrt{3}$ e minini relativi in $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ con valore $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi - \sqrt{3}$, con $k \in \mathbb{Z}$

(C) Convessa su $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, concava su $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi]$ con $k \in \mathbb{Z}$

(D) La funzione $x \mapsto f(x) - f'(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ e ha limiti $\pm\infty$ in $\pm\infty$

(E) $-\frac{\pi}{6} - \sqrt{3} = f(-\frac{\pi}{6}) < 0 < \frac{7}{6}\pi + \sqrt{3} = f(\frac{7}{6}\pi)$ e $f'(x) > 0$ per $x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi)$, dunque f ha un solo zero in tale intervallo. In tutti gli altri punti di minimo escluso $-\frac{\pi}{6}$ il valore $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi - \sqrt{3}$ ha lo stesso segno di $k \neq 0$, e nei punti di massimo il valore $-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi + \sqrt{3}$ è negativo per $k \leqslant 0$ e positivo per $k > 0$, dunque f è negativa su $(-\infty, -\frac{\pi}{6})$ e positiva su $(\frac{7}{6}\pi, +\infty)$