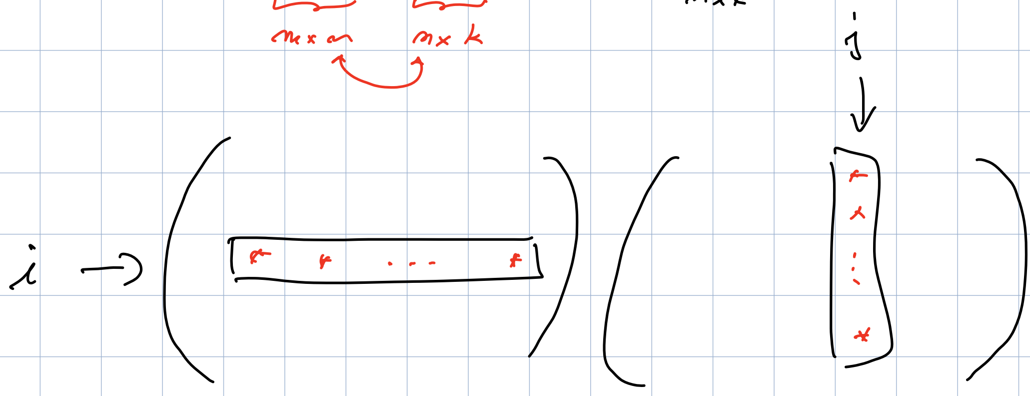
Ist. Mat. I - CIA
20/3/24

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ $\qquad$ $B \in \mathcal{M}_{n\times k}$

$$\underbrace{A}_{m\times n} \cdot \underbrace{B}_{n\times k} \in \mathcal{M}_{m\times k}$$



$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ $\qquad$ $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \longmapsto A\cdot x$

__lineare__ : rispetto a comb. lin.

__Fatto__ :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend left, "f_B \circ f_A"] \arrow[rr, bend right, "f_{A\cdot B}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

$A \in \mathcal{M}_{m\times k}$

$B \in \mathcal{M}_{n\times m}$

$A\cdot B = \mathcal{M}_{m\times k}$

$$f_{A\cdot B} = f_A \circ f_B$$

La composizione di applicaz. corrisponde al prodotto fra matrici:

Segue da:
$$\underbrace{\underbrace{(\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B})}_{m\times k}\cdot\underset{k\times h}{C}}_{m\times h} = \underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underbrace{(\underset{n\times k}{B}\cdot\underset{k\times h}{C})}_{n\times h}}_{m\times h}$$

Es:
$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 27 & 10 \\ -41 & 28 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & * \\ * & * \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\right)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

—— o ——

Oss:

- la composizione di appl. lin. è lineare

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & W \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

<u>Oss</u>: • se f lineare è invertibile allora f^{-1} invertibile

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Intuitivamente: $\mathbb{R}^n \neq \mathbb{R}^m$ come sp. vett.
se $n \neq m$ (ragione: hanno dim. diverse)

<u>Def</u>: $f: V \to W$ lineare invertibile si dice isomorfismo; V e W detti isomorfi

"f dice che V e W sono uguali come sp. vett."

<u>Oss</u>: se V e W sono isomorfi hanno la stessa dim.
(ragione: se $f: V \to W$ e prendo $\mathcal{B}$ base di V allora $f(\mathcal{B})$ è base di W).

<u>Prop</u>: se V ha dimensione n con base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

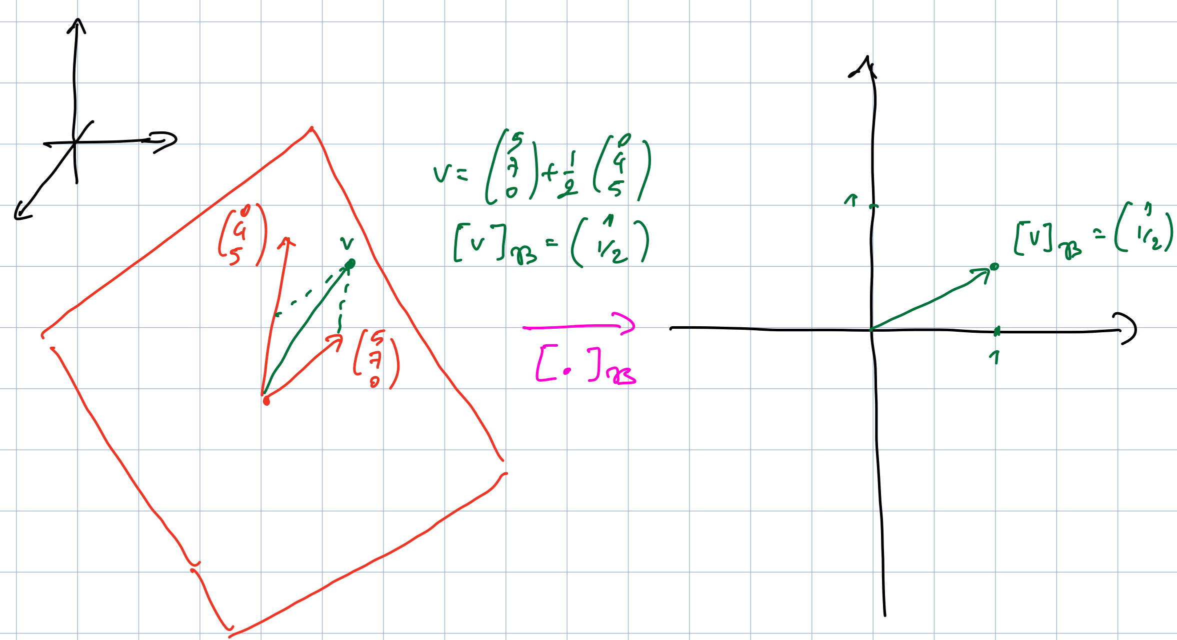
$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto [v]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

è isomorfismo (lineare invertibile).

$V = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \ 7x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \}$

V ha dimensione 2: base $\mathcal{B} = \left(\underset{v_1}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix}}}, \underset{v_2}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}}} \right)$.

$$V \to \mathbb{R}^2$$
$$v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$$



<u>Conseguenza</u>: se $\dim(V) = n$ allora V è isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

In particolare: V e W sono isomorfi
$\iff$ hanno stessa dimensione.

Esempi di appl. lin.

- $tr: M_{m\times m}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ traccia

$tr(A)$ = somma degli elem. di A sulla diagonale principale (NO-SE)

$$tr\begin{pmatrix} 7 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ \pi & 3 & 17 \end{pmatrix} = 7+1+17 = 25$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{m} (A)_{ii}$$

- trasposizione $M_{m\times m} \longrightarrow M_{m\times m}$ che scambia tra loro righe e colonne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \\ 1 & \pi \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & \pi \end{pmatrix}$$

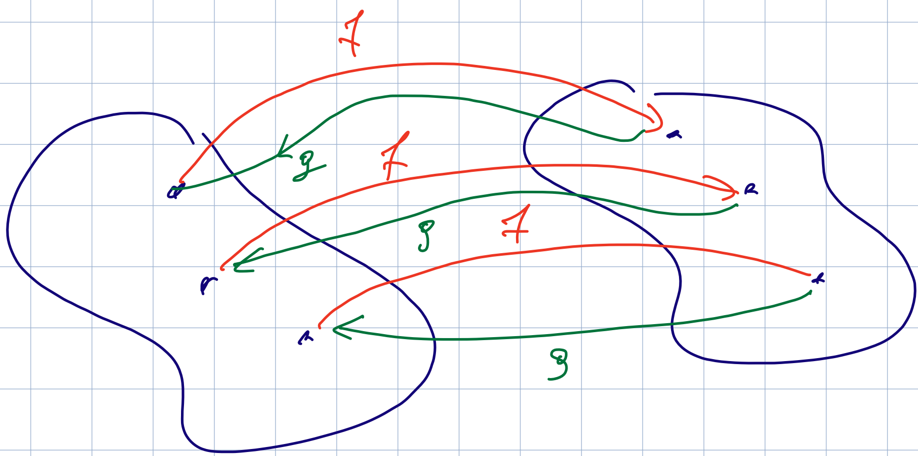
trasposta

- derivazione $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$
$p(x) \mapsto p'(x)$

$$(7-4x+12x^2+9x^3)' = -4+24x+27x^2$$

$$id_X : X \to X \qquad id_X(x) = x$$

Ricordo: $f: X \to Y$ è invertibile se
esiste $g: Y \to X$ t.c.
$f \circ g = id_Y \qquad g \circ f = id_X$



Chiamo matrice identità $n \times n$ la

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ & & & \ddots & \\ \cdots & & & & 1 \end{pmatrix}$$

cioè 1 sulla diag. princ., 0 fuori.

Oss: $I_n \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
cioè l'applicaz. associata a I_n è $id_{\mathbb{R}^n}$.

$$\underset{\substack{\parallel \\ I_3}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ \pi \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \pi \\ -7 \end{pmatrix}$$

Più in generale se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ ho

$$I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$$

$$\underset{\substack{\cap \\ \mathcal{M}_{3\times 2}}}{\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ \pi & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\substack{\| \\ I_2 \\ \cap \\ \mathcal{M}_{2\times 2}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \square \\ \square & \square \\ \square & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare se rispetta le comb. lin.
- $A \in \mathcal{M}_{m\times n} \rightsquigarrow f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\quad x \mapsto A\cdot x$

<u>Teorema</u>: le applicaz. lin. da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ sono tutte e sole quelle che provengono dalle matrici $m\times n$

<u>Es</u>: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

Affinché sia lineare bisogna che f_1 e f_2 siano polinomi di grado 1 omogenei nelle variabili x_1, x_2, x_3, cioè:

$$\cancel{7} + 9x_1 - \pi x_2 + 54x_3 \cancel{+ \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{\sqrt{7}}x_1x_3 + \dots}$$

$$\cancel{+ \frac{1}{\sqrt{3}}x_1x_2^2 + \dots}$$

Quindi: $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_1 - \pi \cdot x_2 + 54x_3 \\ \frac{97}{2}x_1 + 11x_2 - \frac{6}{\sqrt{7}}x_3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -\pi & 54 \\ 97/2 & 11 & -6/\sqrt{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Un polinomio omogeneo di grado 1 è detto <u>lineare</u>.

———— o ————

Convenzione: se $A \in M_{m \times n}$ indico $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A soltanto.

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 & 4 \\ -3 & 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Prendo V, W sp. vett. e $f: V \to W$ lineare. Pongo:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ v \in V : f(v) = 0 \} \subset V$$ nucleo

$$\mathrm{Im}(f) = \{ f(v) : v \in V \}$$ immagine

$$= \{ w \in W : \exists v \in V \text{ con } f(v) = w \} \subset W$$

def. insiemistica

Prop: $\mathrm{Ker}(f)$ è sottosp. vett. di V
$\mathrm{Im}(f)$ è sottosp. vett. di W

Dim: $\mathrm{Ker}(f)$ sottosp.: $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$
voglio provare che $t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$.

Ho $f(v_1) = f(v_2) = 0$; devo vedere $f(t_1 v_1 + t_2 v_2) = 0$.
Infatti:

$$f(t_1 v_1 + t_2 v_2) = t_1 f(v_1) + t_2 f(v_2)$$
$$= t_1 \cdot 0 + t_2 \cdot 0 = 0$$

$\mathrm{Im}(f)$ sottosp.: $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(f)$
voglio provare $t_1 w_1 + t_2 w_2 \in \mathrm{Im}(f)$.

$w_1 = f(v_1) \quad w_2 = f(v_2)$

$$f(t_1 v_1 + t_2 v_2) = t_1 f(v_1) + t_2 f(v_2) = t_1 w_1 + t_2 w_2 \, . \quad \blacksquare$$

Prop: $f: V \to W$ lin. è iniettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

Es: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $f(x) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 5 \\ 11 & -6 \end{pmatrix} \cdot x$

$$\operatorname{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 0\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 5 \\ 11 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 7x_1 + 4x_2 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 = 0, \\ 11x_1 - 6x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} x_2$$

$$\frac{35}{2} x_2 + 4x_2 = 0 \quad \to \frac{43}{2} x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 0 \qquad x_1 = 0$$

$= \{0\}$: <u>è iniettiva</u>.

Es: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ $\quad f(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -4 & 2 & -11 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix} \cdot x$

$$\operatorname{Ker}(f): \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \quad \checkmark \\ -4x_1 + 2x_2 - 11x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} \end{array} \begin{cases} x_2 = 3x_1 + 7x_3 \\ 5x_1 + 3x_1 + 7x_3 + 5x_3 = 0 \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 + 7x_3 \\ x_3 = -\frac{2}{3}x_1 \\ -4x_1 + 6x_1 + 14x_3 \\ \ldots \end{cases}$$

Prop: f iniettiva $\iff$ $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

Dimo: se f iniettiva ho $f(0)=0$ dunque $f(v) \neq 0$ se $v \neq 0$
$\Rightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

Se $\operatorname{Ker}(f) = 0$ allora, se $f(v_1) = f(v_2)$ ho

$$f(v_1) - f(v_2) = 0$$
$$f(v_1 - v_2) = 0$$
$$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$$
$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2.$$

$\blacksquare$

Oss:
- f suriettiva $\iff$ $\operatorname{Im}(f) = W$.
- $f \equiv 0 \iff \operatorname{Ker}(f) = V \iff \operatorname{Im}(f) = \{0\}$.

Teo (formula delle dimensioni):
se $f : V \to W$ è lineare
allora $\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(V)$.

Conseguenze:

- Se f è iniettiva, cioè $\operatorname{Ker}(f) = 0$

$$\underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{0} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{\substack{\text{sottosp. di } W \\ \dim \leq \dim(W)}} = \dim(V)$$

$$\Longrightarrow \dim(V) \leq \dim(W)$$

- Non possono esistere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lin. iniettive

- Se f è surgettiva, cioè $\mathrm{Im}(f) = W$

$$\underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{\substack{\vee\!/ \\ 0}} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{\dim(W)} = \dim(V)$$

$$\Longrightarrow \dim(V) \geq \dim(W)$$

- Non possono esistere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lin. surgettive.

- Se esiste $f : V \to W$ lin. bigettiva allora $\dim(V) = \dim(W)$

- Se $\dim(V) = \dim(W) = n$ allora $f : V \to W$ lin.

  surgettiva $\Longleftrightarrow$ iniettiva.

Se due spazi hanno dimensioni diverse è impossibile trovare fra loro un isomorfismo (lin. bijettiva)

Se due spazi hanno la stessa dimensione una lineare f da uno all'altro è isomorfismo (iniett + surg) $\Leftrightarrow$ iniettiva o surgettiva.

$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ isomorfismo?

No: mai surgettiva

$\mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ isomorfismo?

No: mai iniettiva

$f: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ isomorfismo?

Può esserlo: per vederlo basta vedere che è iniettiva $(\mathrm{Ker}(f) = \{0\})$

oppure che è surgettiva.

<u>Es</u>: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x) = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$

E' isomorf? Calcolo

$\mathrm{Ker}(f)$: $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -5x_1 \\ 7x_1 + 20x_1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 27x_1 = 0 \\ x_2 = -5x_1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ <u>Sì</u>

Es: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x$

È isomorf.? Calcolo

$$\mathrm{Ker}(f): \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{III} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{cases} x_2 = 4x_1 + 3x_3 \\ x_1 - 28x_1 - 21x_3 + 3x_3 = 0 \\ -5x_1 + 8x_1 + 6x_3 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{-27x_1 - 18x_3 = 0} \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 4x_1 + 3x_3 \end{cases}$$

Ho la soluz. non nulla $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(anzi: $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$)

$\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ non iniettiva
dunque non è nemmeno suriettiva.