Ist. Mat. I – CIA
8/11/23

Es.: $$D(\log|f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$D(\log|x|) = \frac{1}{x}.$$

Visto: $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Altre due spiegazioni:

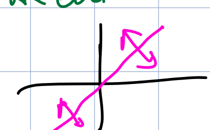
- assumendo che $(f^{-1})'$ esista:

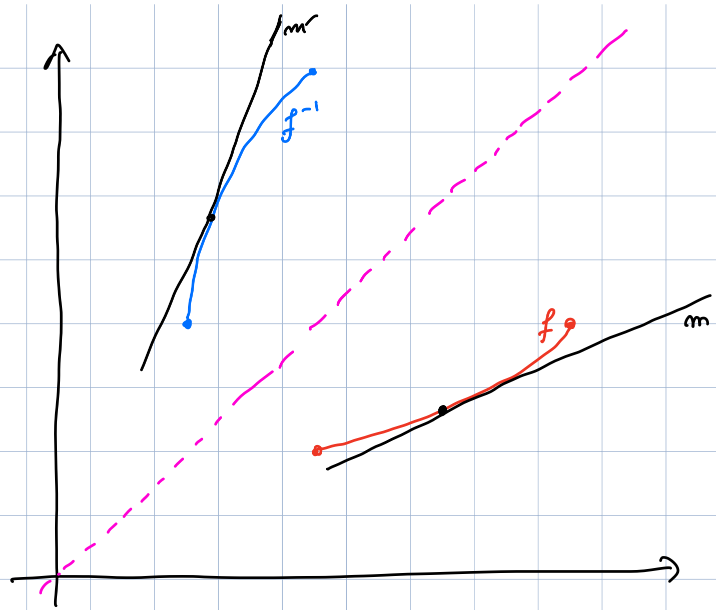
$$f(f^{-1}(y)) = y$$

$$D(\;''\;) = D(\;''\;)$$

$$f'(f^{-1}(y))\cdot(f^{-1})'(y) = 1$$

- so che il grafico di f^{-1} si ottiene riflettendo quello di f rispetto a





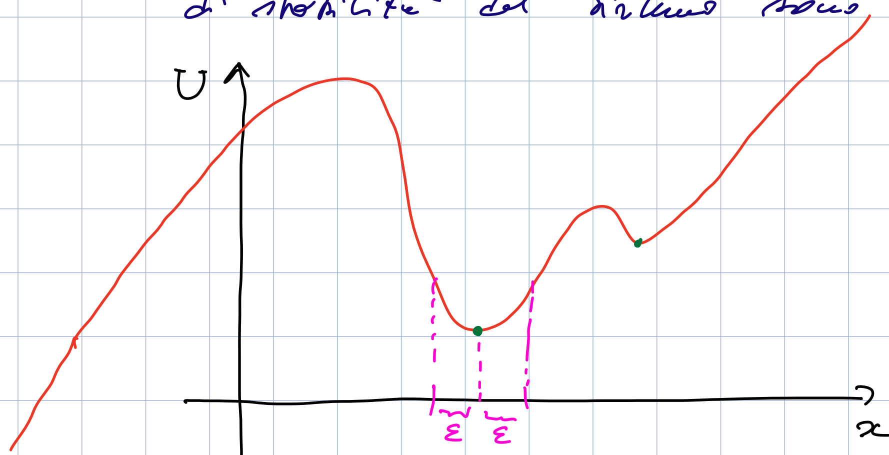
m pendenza per $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ è

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0};$$

sua riflessione passa per $\begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow m' = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = \frac{1}{m}$$

Es: se $U(x)$ è la energia potenziale di un sistema che dipende da $x \in \mathbb{R}$ i punti di stabilità del sistema sono



Def: se $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ chiamo x_0 punto di **min. locale** o **relativo** se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in I$, $|x - x_0| < \varepsilon$;
min. assoluto se $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in I$.

x_0 max. locale ... $f(x) \le f(x_0)$ ...
assoluto ... ...
x_0 min o max loc. è detto estremale.

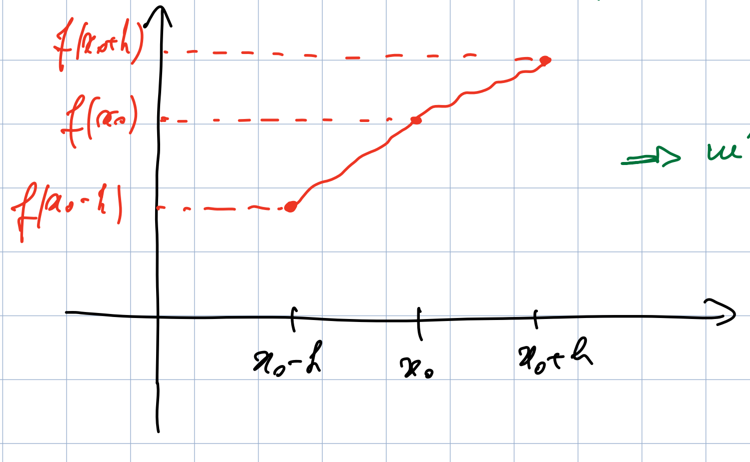
Prop: se x_0 è max/min locale per $f: I \to \mathbb{R}$, x_0 è interno a I ed esiste $f'(x_0)$ allora $f'(x_0) = 0$. (Def: dirò x_0 stazionario o critico)

Dim: per assurdo suppongo $f'(x_0) > 0$ o $f'(x_0) < 0$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \quad \text{per } h \text{ piccolo}$$

$\Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0)$ concorde con h per h piccolo



$\Rightarrow$ né min né max loc.

∎

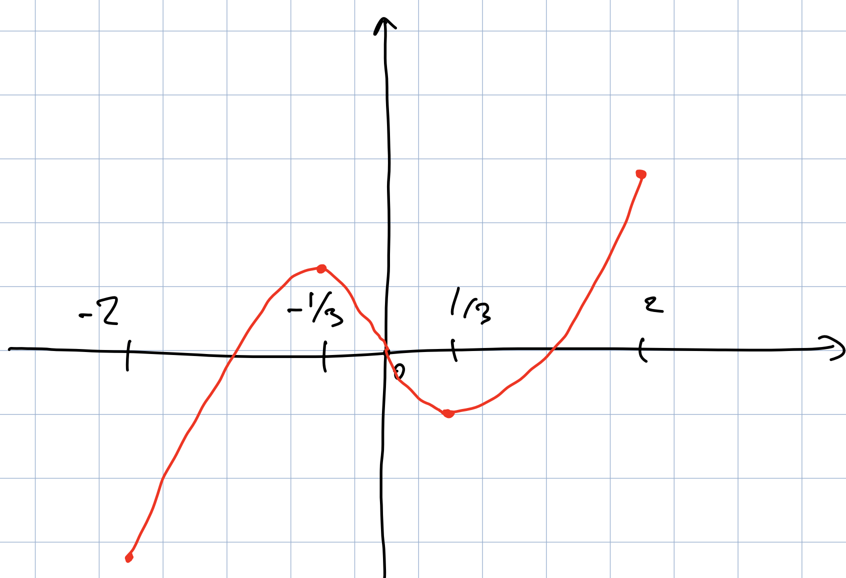
Ricerca estremali: esame dei punti estremi o di non derivabilità + ricerca punti stazionari.

Es: $f(x) = 3x^3 - x$ su $[-2, 2]$.

Cerco max/min loc: possono essere ± 2 o quelli in $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 9x^2 - 1$ nulle in $x = \pm \frac{1}{3}$

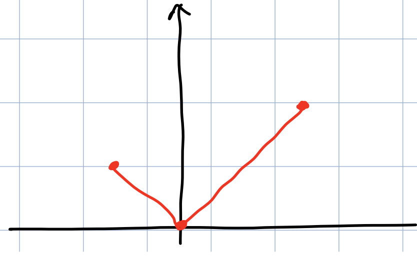
$f''(\pm 2) = 35 > 0$



Es: $f(x) = |x|$ su $[-1, 2]$

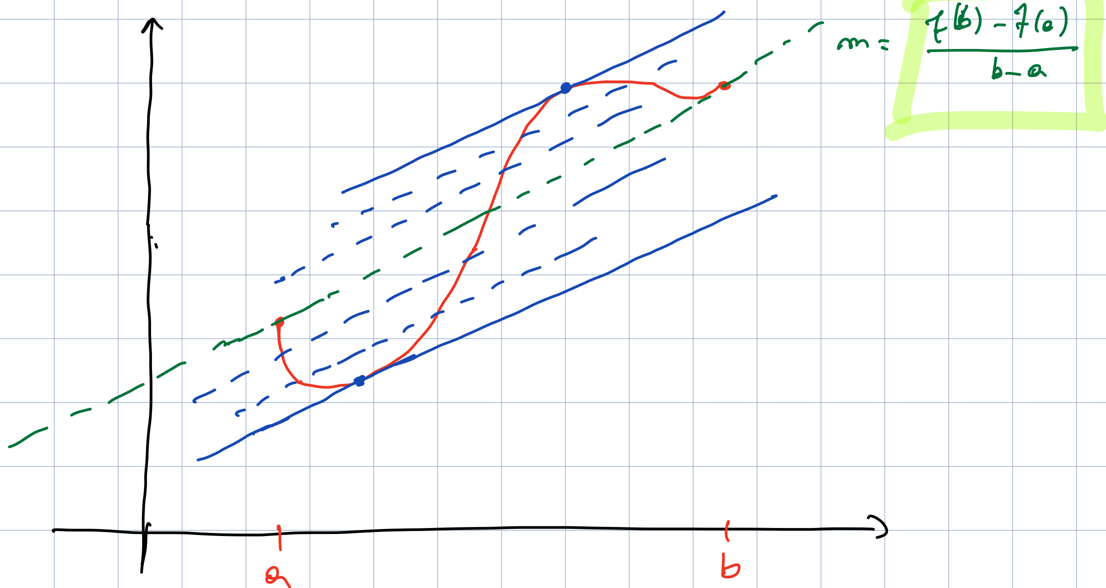
$$f'(x) \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ \nexists & x = 0 \end{cases}$$

esamino $-1, 0, 2$



Teo (Lagrange): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e derivabile su (a,b).

Allora $\exists\, c\in(a,b)$ t.c. $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Dim: pongo $g(x) = f(x) - \big(\overbrace{m(x-a)+f(a)}^{\text{retta per estremi}}\big)$

$\Rightarrow g(a)=0 \qquad g(b)=0$

① $g\equiv 0 \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ f'(x)-m}}{g'(x)}\equiv 0 \Rightarrow f'(x)\equiv m$

② $g\not\equiv 0 \Rightarrow$ ha max >0 o min <0 (Weierstrass)

$\Rightarrow$ esso c è interno

$\Rightarrow g'(c)=0 \Rightarrow f'(c)=m$. $\blacksquare$

Cor (Teo di Rolle): f cont. su $[a,b]$, deriv. su (a,b)
$f(a)=f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ t.c. $f'(c)=0$.

Cor: $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile, I qualsiasi
f crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x$
f decrescente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x$.

Dim: f crescente $\Rightarrow$ preso x e $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$

$f(x+h) \geq f(x)$ se $h>0$

$f(x+h) \leq f(x)$ se $h<0$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0.$$

Se $f'(x) \geq 0 \ \forall x$ dati $x_1 < x_2$ devo vedere che
$f(x_1) \leq f(x_2)$.

Applico Lagrange a f su $[x_1, x_2]$

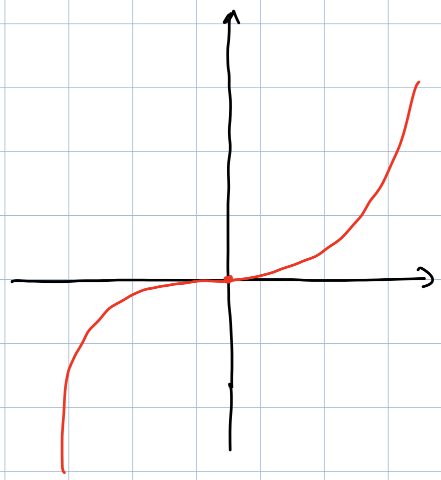
$$\exists c \in (x_1, x_2) \quad \text{t.c.} \quad \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{> 0}}$$

$$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

$\square$

Prop: se $f'(x) > 0$ $\forall x$ allora f è strettamente crescente.
(come appena visto).

Oss: falso viceversa; $f(x) = x^3$



$f'(0) = 0$

Teo (Cauchy): $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, derivabili su (a,b); $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$. Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Oss: se $g(x) = x$ ritrovo Lagrange.

Dim: pongo $h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x)$.

$$h(a) = \boxed{f(b) \cdot g(a)} \cancel{- f(a) \cdot g(a)} \boxed{- g(b) \cdot f(a)} \cancel{+ g(a) \cdot f(a)}$$

$$h(b) = \cancel{f(b) \cdot g(b)} \boxed{- f(a) \cdot g(b)} \cancel{- g(b) \cdot f(b)} \boxed{+ g(a) \cdot f(b)}$$

$\Rightarrow h$ è cont. su $[a,b]$, der. in (a,b), $h(b)=h(a)$

$\Rightarrow \exists\, c$ interno t.c. $h'(c)=0$;

$$h'(c) = \big(f(b)-f(a)\big)\cdot g'(c) - \big(g(b)-g(a)\big)\cdot f'(c) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

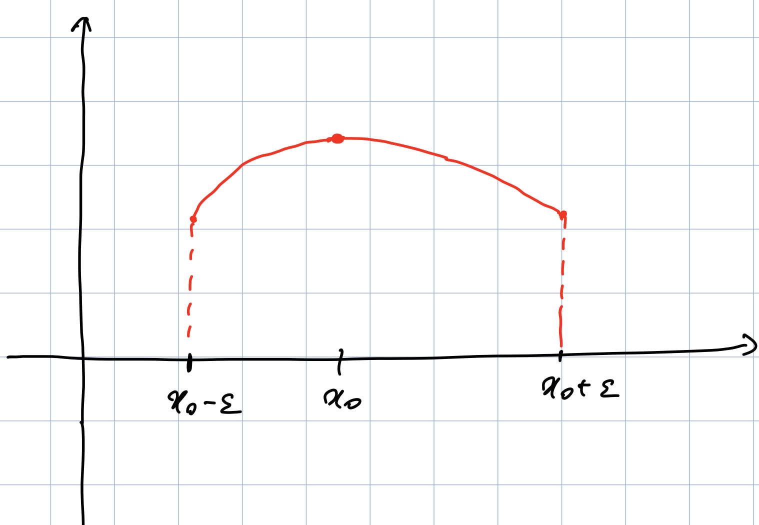
Fatto: Se $x_0 \in (a,b)$ e

$f'(x_0)=0$ $\quad f'(x)>0$ per $x_0-\varepsilon<x<x_0$

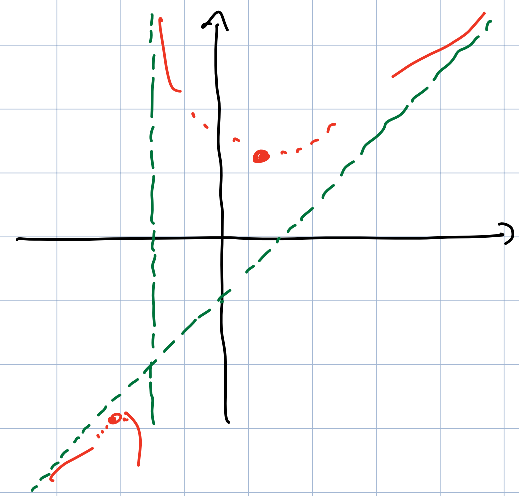
$\quad f'(x)<0$ per $x_0<x<x_0+\varepsilon$

per $\varepsilon>0$

$\Rightarrow f$ ha max rel. in x_0.



Ese: $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x+2}$ su $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.



$$\lim_{x \to (-2)^\pm} f(x) = \frac{9}{0^\pm} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{\pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\frac{x^2+5}{x+2} - x = \frac{x^2+5-x^2-2x}{x+2} = \frac{-2x+5}{x+2} \longrightarrow -2$$

as. obl. $y = x - 2$

$$f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - 1\cdot(x^2+5)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} = \frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2}$$

f'		-5		-2		0		1	
	$+\ +$	0	$-$	$\nexists$	$-$		$-$	0	$+\ +$
		max rel						min rel	

Teorema (regola di de l'Hôpital):

$f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili, $x_0 \in I$

($g(x), g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$ vicino a x_0)

$\boxed{\dfrac{f(x)}{g(x)} \text{ sia F.I. } \dfrac{0}{0} \text{ oppure } \dfrac{\infty}{\infty}}$

Se esiste $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

allora esiste $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Come non usare la regola: per calcolare $\displaystyle\lim \frac{f(x)}{g(x)}$

calcolo $\displaystyle\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Errore: sì ma solo se prima hai visto che è $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$

Dimo nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e FI $\dfrac{0}{0}$

(Ese: fare gli altri quando $1/\infty = 0$ $\quad 1/0^\pm = \pm\infty$)

Ipotesi $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$; se definisco $f(x_0) = 0$ ho f è continua in 0

$\displaystyle\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$; se definisco $g(x_0) = 0$ ho g continua in 0.

Ora prendo $x \neq x_0$ vicino a x_0:

$$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

Applico Cauchy sull'intervallo di estremi x_0 e x
($[x_0, x]$ se $x > x_0$,
$[x, x_0]$ se $x < x_0$)

Tesi: $\exists\, c$ compreso tra x_0 e x t.c.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Per ogni x ho trovato un tale c compreso tra x_0 e x.

Per $x \to x_0$ ho necessariamente $c \to x_0$;
allora

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} \longrightarrow L$$

$$\Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow L.$$

Altri limiti notevoli / dimostrazione di confronto fra ∞

$\alpha, \beta > 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \Bigg(\underbrace{\frac{x}{e^{\beta/\alpha \cdot x}}}_{\frac{\infty}{\infty}}\Bigg)^\alpha$$

de l'H.

$$\frac{1}{\beta/\alpha \cdot e^{\beta/\alpha \cdot x}} \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \longrightarrow 0$$

$a > 1$, $\alpha, \beta > 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta}$ $\qquad \frac{\infty}{\infty}$

$t = \log_a(x) \qquad t \longrightarrow +\infty$

$$x = a^t \qquad \frac{(\log_a(x))^\alpha}{x^\beta} = \frac{t^\alpha}{a^{\beta t}} = \frac{t^\alpha}{e^{\gamma t}} \longrightarrow 0$$

$\gamma > 0$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6}}$$

$$\frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{1/2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)-\frac{1}{2}x^2}{x^4} = -\frac{1}{24}}$$

$$\frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{0+\sin(x)-x}{4x^3} = -\frac{1}{4} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}}_{\frac{1}{6}}$$