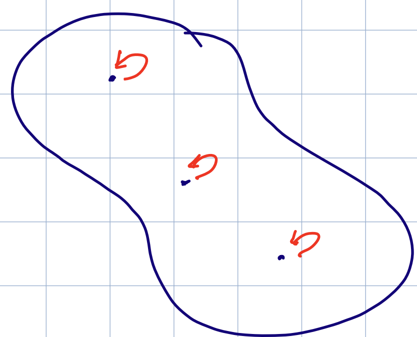
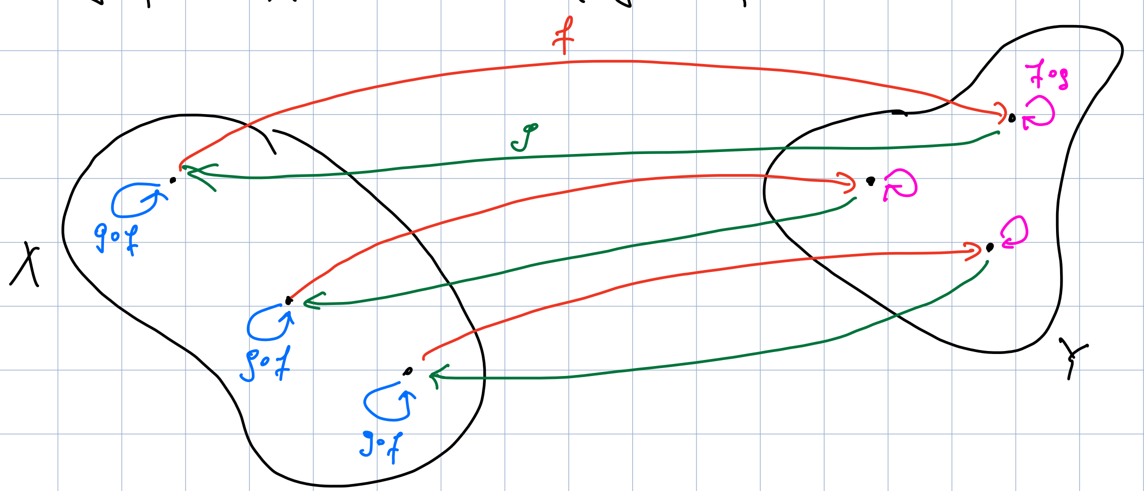
Ist. Mat. I – C/A
27/9/23

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$; $g \circ f: X \to Z$
$x \longmapsto g(f(x))$

X insieme: $id_X : X \to X$ $\quad id_X(x) = x$.



Dico che $f: X \to Y$ è invertibile se esiste $g: Y \to X$ t.c.
$g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$



Tale g se esiste si chiama inversa di f, è unica (es.) ed è indicata con f^{-1} (inversa di f).

Verifichiamo che se esiste è unica:

suppoiamo che esistano $g_1, g_2 : Y \to X$ t.c.

$g_1 \circ f = id_X$ $\quad g_2 \circ f = id_X$ $\quad f \circ g_1 = id_Y$ $\quad f \circ g_2 = id_Y$

Due funzioni sono uguali se hanno

- stesso dominio ✓
- stesso codominio ✓
- stessa legge

$g_1 : Y \to X$

$g_2 : Y \to X$

$$
\begin{aligned}
g_2(y) &= id_X(g_2(y)) \\
&= (g_1 \circ f)(g_2(y)) \\
&= g_1(f(g_2(y))) \\
&= g_1((f \circ g_2)(y)) \\
&= g_1(y)
\end{aligned}
$$

Proposizione: $f : X \to Y$ è invertibile $\Longleftrightarrow$ f è bijettiva (iniettiva + surgettiva).

Lemma: date $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ t.c. $g \circ f = id_X$ allora f è iniettiva e g è surgettiva.

Dim: f iniettiva: prendo $x_1, x_2 \in X$ t.c. $f(x_1) = f(x_2)$;

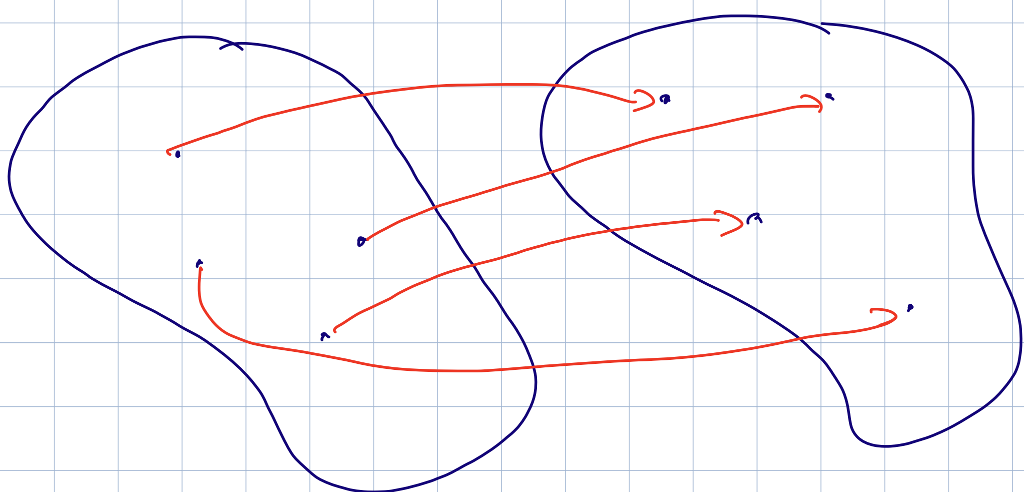
$\Rightarrow \underbrace{g(f(x_1))}_{x_1} = \underbrace{g(f(x_2))}_{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$.

g surgettiva: $x \in X \Rightarrow x = g(f(x))$. ∎

(g è inversa sinistra di f ; f inversa destra di g).

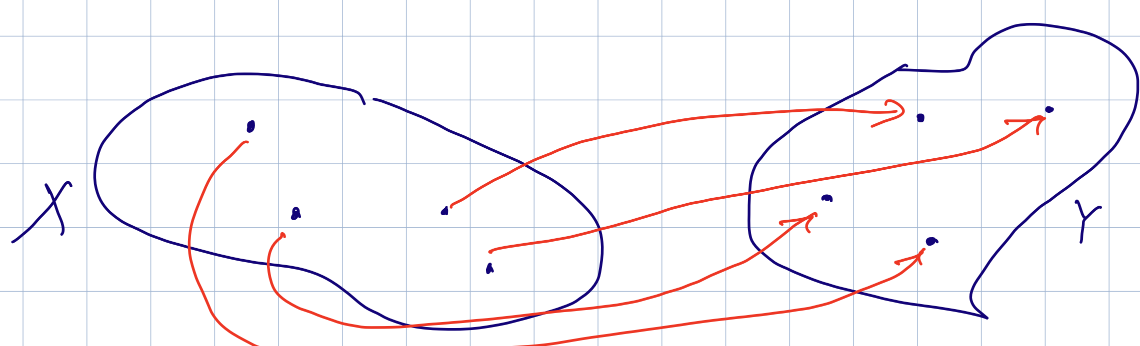
Dim: f invert $\Rightarrow$ bigettiva : $\exists g$ t.c.

$$g \circ f = Id_X \overset{(\text{Lem})}{\Longrightarrow} f \text{ iniettiva}$$
$$f \circ g = id_Y \underset{(\text{Lem})}{\Longrightarrow} f \text{ surgettiva}. \qquad \boxtimes$$



- Se X e Y sono finiti ed esiste $f: X \to Y$ bigettiva allora hanno lo stesso numero di elementi.

- Se X e Y sono finiti con lo stesso numero di elementi, data $f: X \to Y$ si ha f iniettiva $\Longleftrightarrow f$ surgettiva.

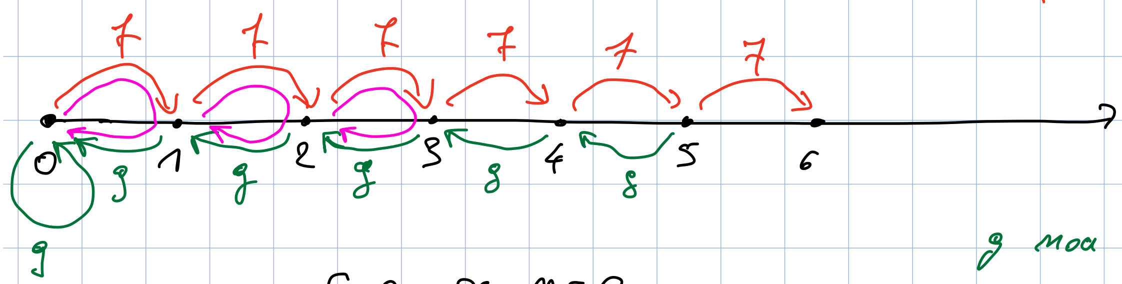


Quindi: se X e Y hanno stesso numero di elementi, data $f: X \to Y$ una inversa sinistra oppure destra è anche inversa.

Esempio: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = n+1$$

f iniettiva
f non surgettiva



$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ n-1 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

g non iniettiva
g surgettiva

$$g \circ f = id_{\mathbb{N}}$$

g inversa sinistra di f
f inversa destra di g

$$(f \circ g)(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

non iniettiva
non surgettiva

——— o ———

X, Y insiemi; prodotto cartesiano

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, \ y \in Y\}$$

Es: $X = \{0, 1\}$ $\qquad Y = \{a, b, g\}$

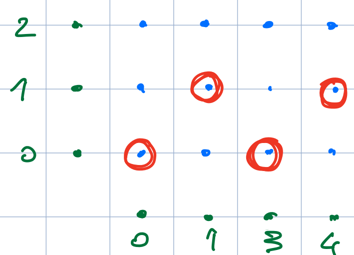
$$X \times Y = \{(0,a), (0,b), (0,g), (1,a), (1,b), (1,g)\}$$

Data funzione $f: X \to Y$ chiamo grafico di f

$$G(f) = \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subset X \times Y.$$

Es: $X = \{0, 1, 3, 4\}$ $Y = \{0, 1, 2\}$

$f: X \to Y$ $f(x) =$ resto $x^2 : 3$



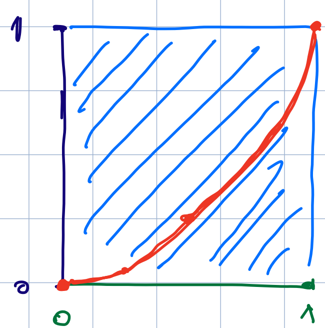
$X \times Y$

$G(f)$

Ese: $[0,1] = \{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1 \}$

$f: [0,1] \to [0,1]$

$f(x) = x^2$



$[0,1] \times [0,1]$

$G(f)$

X uno degli $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ operazioni

$$+ : X \times X \to X \qquad\qquad \cdot : X \times X \to X$$
$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \qquad\qquad (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$$

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$0 + x = x$	Sì	—	—	—
$\forall x \ \exists (-x)$ t.c. $x + (-x) = 0$ $\leftarrow$	No	Sì	—	—
$x + (y+z) = (x+y)+z$	Sì	—	—	—
$x + y = y + x$	Sì	—	—	—
$1 \cdot x = x$	Sì	—	—	—
$\forall x \neq 0 \ \exists (x^{-1})$ t.c. $x \cdot (x^{-1}) = 1$ $\leftarrow$	No	No	Sì	—
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	Sì	—	—	—
$x \cdot y = y \cdot x$	Sì	—	—	—
$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	Sì	—	—	—

—— o ——

Domani : 9:30 — 11:15

Ordinamento: $<$ $\qquad$ "$x \leq y$" = "$x < y$ o $x = y$"

Proprietà di $<$:

- transitiva: $x < y, \ y < z \Rightarrow x < z$
- tricotomia: dati x, y vale una e una sola fra $x < y, \ x = y, \ y < x$ ($x > y$)
- monotonia: $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

  $x < y, \ z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$.

Proprietà di $\leq$:

transitiva ✓

antisimmetrica : $x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$

riflessiva ✓

✓

—— o ——

Valore assoluto : $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$\cancel{-(\ldots) = (\ldots)}$

$\cancel{-(-5)}$

Proprietà : • $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ese

• $|x+y| \leq |x| + |y|$ disug. tria.

ese : provarlo distinguendo il segno di $x, y, x+y$

Invece :

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

$$-|x| - |y| \leq x+y \leq |x| + |y|$$
$$-(|x| + |y|) \leq x+y \leq |x| + |y|$$
$$\Rightarrow \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

possono essere strette

può essere stretta

---o---

Calcolo combinatorio: contare quante sono certe configurazioni di oggetti.

PERMUTAZIONI su $n \in \mathbb{N}$ elementi:

- tutti i modi di mettere in ordine gli elementi di un insieme $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- $f : \{1, \dots, n\} \to \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bigettive
  ($f(j)$ = quello che nell'ordinamento ha posizione j)
- $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bigettiva

Ce ne sono: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Esempio: in quanti modi si può presentare un mazzo di carte da briscola mescolato?

$$40! \cong 8.15 \cdot 10^{47}$$

DISPOSIZIONI DI k oggetti su n

le scelte ordinate di k oggetti tra n

Es: $\{a, b, c, d, e\}$ $\quad n = 5$

$k = 3 \quad \{(a,b,c), (a,c,b), (b,e,d), \dots\}$

Quante sono? $\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

$n=5 \quad k=3 \qquad 5\cdot 4\cdot \underset{5-3+1}{\underset{\shortparallel}{3}}$

$n=7 \quad k=3 \qquad 7\cdot 6\cdot \underset{(7-3+1)}{\underset{\shortparallel}{5}}$

$n=5 \quad k=3 \qquad \underset{120}{\underset{\shortparallel}{5\cdot 4\cdot 3}} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{2}\cdot\cancel{1}}$

$n=7 \quad k=3 \qquad \underset{210}{\underset{\shortparallel}{7\cdot 6\cdot 5}} = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}$

PERMUTAZIONI con ripetizione di n oggetti in cui l'oggetto j-esimo compare k_j volte.

Es: oggetti $= \{\diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit, \heartsuit\}$

$k_{\diamondsuit} = 13 \qquad k_{\spadesuit} = 13 \qquad k_{\clubsuit} = 13 \qquad k_{\heartsuit} = 13$

Conto i possibili ordinamenti dei semi di un mazzo da 52 carte mescolato.

Quante sono le permutazioni di n oggetti in cui il j-esimo compare k_j volte.

Esempio: oggetti $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\clubsuit$

$k_\diamondsuit = 3 \qquad k_\heartsuit = 1 \qquad k_\clubsuit = 2$

Una delle config. è

$\diamondsuit \heartsuit \diamondsuit \clubsuit \clubsuit \diamondsuit$

Se le considero come carte diverse: $6!$

diverse come config. di carte

$1\diamondsuit, 6\heartsuit, 7\diamondsuit, K\clubsuit, 5\clubsuit, Q\diamondsuit \neq Q\diamondsuit\ 6\heartsuit\ 1\diamondsuit\ 5\clubsuit\ K\clubsuit, 7\diamondsuit$

uguali come conf. di semi

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!}$$

ripetizione degli oggetti come se ogni ordinamento fosse diverso

In generale:
$$\frac{(k_1+k_2+\dots+k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!}$$

divido per il numero di ordinamenti delle k_1 ripetiz. del I, k_2 ripetiz. del II ...

Es: $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 13$

tutti i possibili ordinamenti dei semi di un mazzo da 52 mescolato

$$= \frac{52!}{(13!)^4} \cong 4.65 \cdot 10^{41}$$

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE DI k oggetti su n.

Scelgo k oggetti da $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ senza scartare quelli già scelti:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k} = n^k$$