

Foglio 1

Esercizio 9

$$f: X \rightarrow Y \quad g: Y \rightarrow Z$$

PER AVERE $g \circ f: X \rightarrow Z$ DEVO AVERE CHE

codominio $f =$ DOMINIO di g

a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ $f(n) = \frac{n-7}{n+3}$
 $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(m) = \frac{1}{1+|m|}$

$g \circ f$ NON È DEFINITA

b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ $f(n) = \frac{n-7}{n+3}$
 $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1}{1+|x|}$

$$g \circ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad (g \circ f)(n) = g(f(n))$$

$$g\left(\frac{n-7}{n+3}\right) = \frac{1}{1 + \left|\frac{n-7}{n+3}\right|} = (g \circ f)(n)$$

$$c) f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) = \text{RESTO DI } n: 11$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g(m) = \text{RESTO DI } m: 4$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f(n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3
g(g(n))	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	0	1	2	3

FOGLIO 2

ESERCIZIO 1

PRODOTTO CARTESIANO

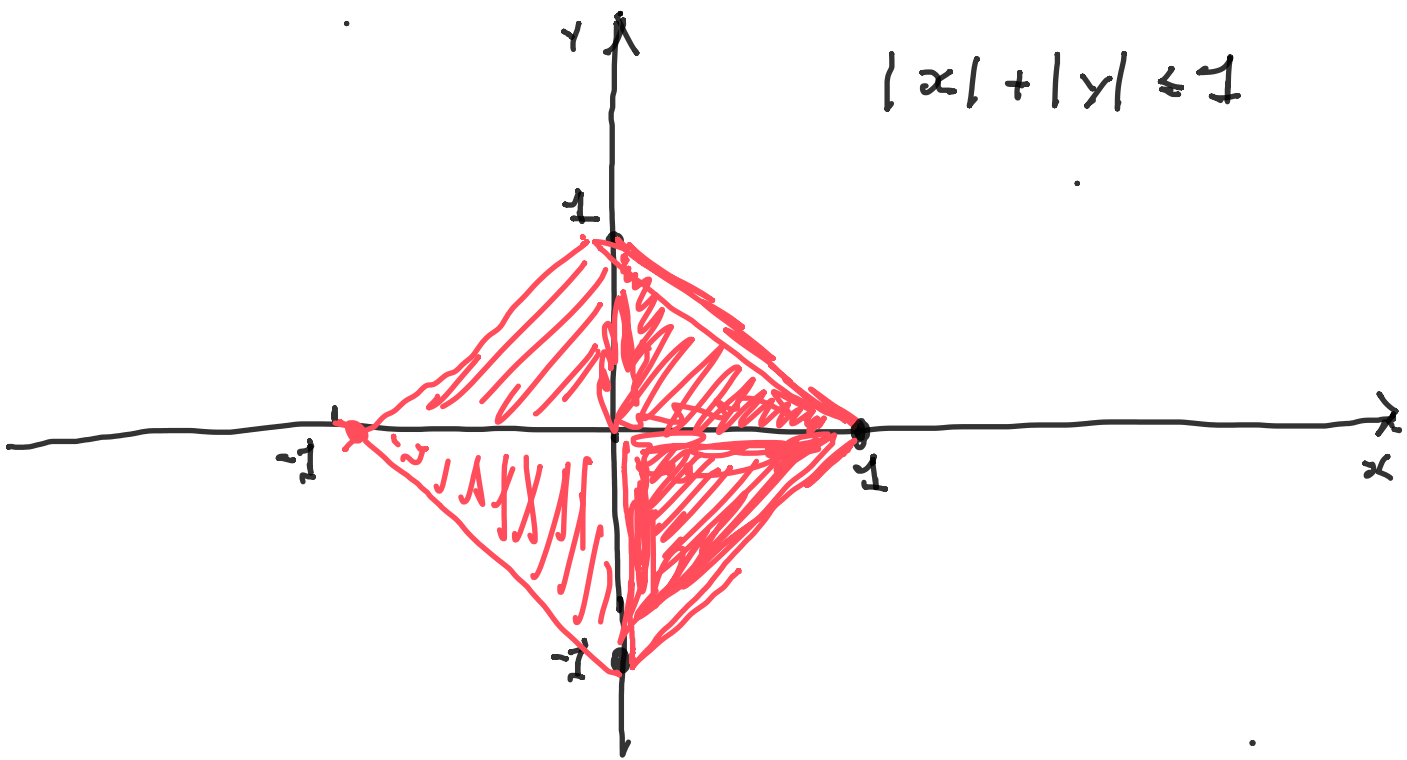
$$a) \left\{ (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \begin{array}{l} 1 < n < 10, 1 < m < 10, \\ n \text{ DIVIDE } m, \underline{n < m} \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \cancel{(2,2)}, (2,4), (2,6), (2,8), (3,6), (3,9), (4,8) \right\}$$

$$b) \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| + |y| \leq 1 \right\}$$

LO DISEGNO SUL PIANO CARTESIANO.

$$\begin{cases} x + y \leq 1 & x \geq 0 & y \geq 0 \\ x - y \leq 1 & x \geq 0 & y < 0 \\ -x + y \leq 1 & x < 0 & y \geq 0 \\ -x - y \leq 1 & x < 0 & y < 0 \end{cases}$$



ESERCIZIO 2

DEF

f INVERTIBILE

SE $\exists g: Y \rightarrow X$ TALE CHE

$f: X \rightarrow Y$

$$g \circ f = \text{id}_X \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

PROP

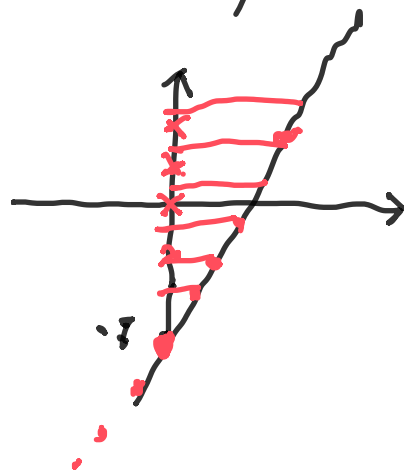
f INVERTIBILE \iff BIGETTIVA (INiettiva + SURGETTIVA)

a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(x) = 2x - 7$$

INiettiva?

SURGETTIVA?



INiettiva $\forall x_1, x_2$ t.c. $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

$$2x_1 - 7 = 2x_2 - 7 \implies x_1 = x_2 \quad \checkmark$$

SURGETTIVA? $\forall y \in Y \exists x \text{ t.c. } f(x) = y$

$f(x)$ È DISPARI!

SE PRENDO $y \in \mathbb{Z}$ PARI ALLORA $\nexists x \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$2x - 7 = y \Rightarrow \text{NON SURGETTIVA}$$

⇓

f NON INVERTIBILE

b) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad f(x) = 2x - 7$

INIETTIVA: SÌ, VEDI 2 a)

SURIETTIVA? PRENDIAMO $y \in \mathbb{Q}$ ^{CODAMINIO}
SE TROVO $x \in \mathbb{Q}$ _{DOMINIO}: $f(x) = y$ ALLORA SÌ

$$f(x) = y \Rightarrow 2x - 7 = y \Rightarrow 2x = y + 7$$

$$\Rightarrow x = \frac{y + 7}{2}$$

f SURGETTIVA + INIETTIVA $\Rightarrow f$ INVERTIBILE

FUNZIONE INVERSA

$$g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$g(x) = \frac{x + 7}{2}$$

8) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ $f(x) = \begin{cases} x & x \text{ PARI} \\ x+7 & x \text{ DISPARI} \end{cases}$

INIETTIVA? $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ $f(x_1) = f(x_2)$

x_1 E x_2 SONO ENTRAMBI PARI O DISPARI

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

x_1 È DISPARI E x_2 È PARI PUÒ SUCCEDERE CHE $f(x_1) = f(x_2)$?

$f(0) = 0$ $f(-7) = -7 + 7 = 0$

⇓
f NON INIETTIVA

SEMPRE PARI!

SE $y \in \mathbb{Z}$ È DISPARI ALLORA $\nexists x: f(x) = y$

ESERCIZIO 3

$f: X \rightarrow Y$ HA UN'INVERSA DESTRA SE $\exists g: Y \rightarrow X$

T.C. $f \circ g: Y \rightarrow Y$ $f \circ g = id_Y$

$f: X \rightarrow Y$ " " SINISTRA $\exists g: Y \rightarrow X$

T.C. $g \circ f: X \rightarrow X$ $g \circ f = id_X$

PROP f HA INVERSA DESTRA $\Leftrightarrow f$ SURGETTIVA

f HA INVERSA SINISTRA $\Leftrightarrow f$ INIETTIVA

a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \quad f(n) = |n|$

INIETTIVA? $f(-3) = f(3) = 3 \Rightarrow f$ NON INIETTIVA

SURGETTIVA? PRENDO $m \in \mathbb{N}$, QUINDI $m \in \mathbb{Z}$

E $f(m) = |m| = m \Rightarrow f$ SURGETTIVA

QUINDI f HA UN'INVERSA DESTRA

$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ T.C. $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$

$$g(n) = n$$

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n) = |n| = n$$

$$g(n) = -n$$

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(-n) = |-n| = n$$

c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = (-1)^n \cdot n$

$$f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 2, f(3) = -3, f(4) = 4$$

INIETTIVA? $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

SE n_1 PARI E n_2 DISPARI

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ \wedge & \vee \\ f(n_1) & \neq f(n_2) \end{matrix}$$

SE n_1 PARI E n_2 PARI E $f(n_1) = f(n_2)$ ALLORA

$$\cancel{(-1)^{n_1}} n_1 = \cancel{(-1)^{n_2}} n_2$$

SE n_1 DISPARI E n_2 DISPARI $f(n_1) = f(n_2)$

$$\cancel{(-1)^{n_1}} n_1 = \cancel{(-1)^{n_2}} n_2$$

f INIETTIVA

SURGETTIVA? $-2 \notin f(n) = (-1)^n n$ f NON SURJETTIVA

QUINDI f HA UN'INVERSA SINISTRA.

$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \quad g \circ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$$

$$g(m) = |m|$$

"SE APPLICO f A n E POI g RIOTENGO n "

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g((-1)^n n) = |(-1)^n n| = n$$

ESERCIZIO 4

$x \geq 1$

$x \geq -1$

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |x-1| + |x+1|$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x - 1-x & x < -1 \\ 1-x + x+1 & -1 \leq x < 1 \\ x-1 + x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} x < -1 \quad -1 \leq x < 1 \quad x \geq 1 \\ \hline - \quad - \quad + \\ \quad - \quad + \quad + \end{array}$$

$$= \begin{cases} -2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

