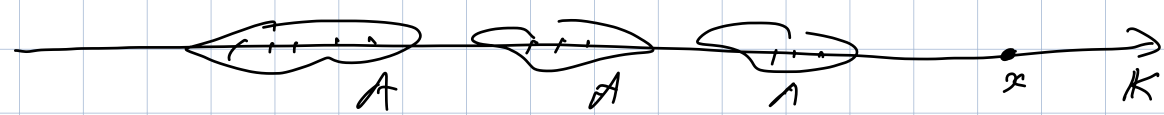
Ist. Mat. I - CIA
4/10/23

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ $\quad +, \cdot \quad$
$\left.\begin{array}{l} \exists 0, \text{ opposto, assoc, comm } + \\ \exists 1, \text{ inverso, assoc, comm } \cdot \\ \text{distributivo} \end{array}\right\}$ campo

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$

Def: $A \subset \mathbb{K}$ si dice superiormente limitato se
$\exists\, x \in \mathbb{K}$ t.c. $a \le x \quad \forall a \in A$



inferiormente limitato se $\exists\, x \in \mathbb{K}$ t.c. $a \ge x \quad \forall a \in A$.

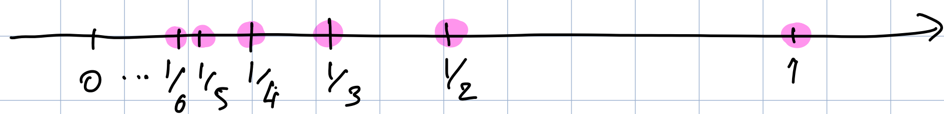
Def: dato $A \subset \mathbb{K}$ dico che $x = \max(A)$ se
$x \in A$ e $a \le x \quad \forall a \in A$.
$x = \min(A)$ se $x \in A$ e $a \ge x \quad \forall a \in A$.

Oss: se A ha max/min allora è sup/inf lim.

Es: •) $A = \mathbb{Z}$ non è sup. lim né inf lim.
(non ha né max né min)

•) $A = \mathbb{N}$ non è sup. lim. ($\Rightarrow$ non ha max)
ha $\min = 0$ $\Rightarrow$ è inf. lim.

•) $A = \left\{ \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ha $\max = 1$ ($\Rightarrow$ è sup. lim.)
è inf. lim. ;



non ha minimo: se ci fosse $\min = \frac{1}{n+1}$
avrei $\underset{A}{\underset{\cap}{\frac{1}{n+2}}} < \frac{1}{n+1}$

assurdo.

•) $A = \{ a \in \mathbb{K} : -7 \leq a < 52 \}$

$\min(A) = -7$ (inf. lim)
sup. lim. ; se $a \in A$ fosse massimo
$\underset{A}{\underset{\cap}{\frac{a+52}{2}}} > a$ $\Longrightarrow$ non ha max

•) $A = \{ x \in \mathbb{K} : x^2 \leq 2 \}$
inf. lim. sì sup. lim. sì

ha max? $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\max(A) = \sqrt{2}$
$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ non ha max
<u>Esercizio</u>: dimostrarlo formalmente

Oss: ogni A può avere al più un max.
Se x_1, x_2 sono max:

- $x_1 \in A$, $a \leq x_1 \ \forall a \in A$ $\Rightarrow x_2 \leq x_1$
- $x_2 \in A$, $a \leq x_2 \ \forall a \in A$ $\Rightarrow x_1 \leq x_2$

$\Longrightarrow x_1 = x_2$

Def: dato $A \subset \mathbb{K}$ diciamo che A ha estremo superiore x se $x \in \mathbb{K}$ e
- $a \leq x \ \forall a \in A$ (è un maggiorante)
- se $y \in \mathbb{K}$ e $a \leq y \ \forall a \in A$ allora $x \leq y$ (è il più piccolo dei maggioranti)

(scriviamo $x = \sup(A)$)

Estremo inferiore: il più grande dei minoranti ($\inf(A)$)

Ese: $\{x \in \mathbb{K} : x^2 < 2\}$ sup + inf. lim.

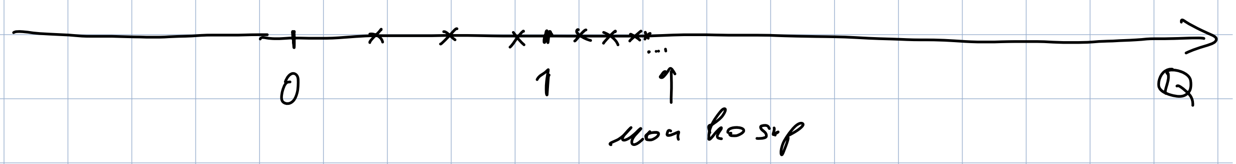
Esercizio: x è sup. e inf. lim.

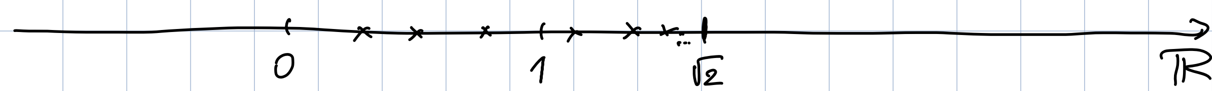
Ha sup?

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$; ha $\sup = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

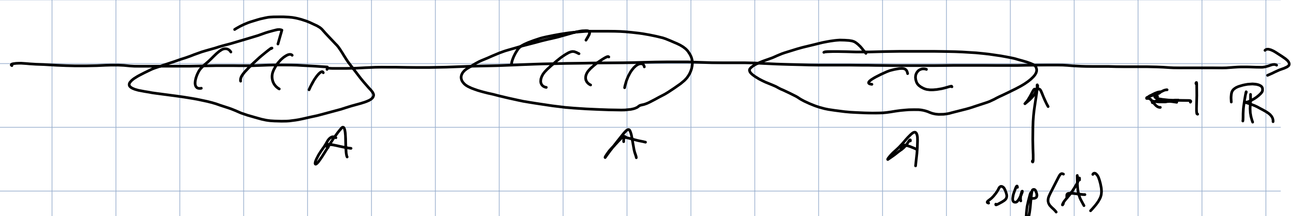
Oss: anche $\inf(A)$, $\sup(A)$ se esistono sono unici.

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$; non ha sup.





Fatto: $A \subset \mathbb{R}$ sup. lim. $\Rightarrow$ A ha sup.
$A \subset \mathbb{R}$ inf. lim. $\Rightarrow$ A ha inf.



$\sup(A)$ $\rightarrow$ $\in A \Rightarrow \sup(A) = \max(A)$

$\sup(A)$ $\rightarrow$ $\notin A \Rightarrow \nexists \max(A)$

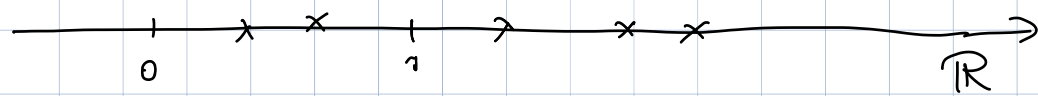
Proprietà di completezza di $\mathbb{R}$.

"la retta non ha buchi"

Potenze: dato $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, vogliamo definire a^x per ogni $x \in \mathbb{R}$ (funzione esponenziale di base a)

- $n \in \mathbb{N}$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$; $a^0 = 1$

- $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$: $a^{1/m} = \sqrt[m]{a} = \sup\{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^m < a\}$



$A = \{x \in \mathbb{R} : x^m < a\}$ è sup. lim.

$x < a \quad \forall x \in A$

Verifico che se $x = \sup(A)$ ho $x^m = a$:
per assurdo avrei

- $x^m < a$: se $\varepsilon > 0$ molto piccolo ho ancora $(x+\varepsilon)^m < a$ quindi $x+\varepsilon \in A$

  Assurdo: x non sarebbe maggiorante

- $x^m > a$: se $\varepsilon > 0$ molto piccolo ho ancora $(x-\varepsilon)^m > a \Rightarrow$ se $y \in A$ ho $y^m < a \Rightarrow y < x - \varepsilon$

  Assurdo: x non sarebbe il più piccolo dei maggioranti.

- $a^{n/m}$ $\quad n, m \in \mathbb{N}, \; m \neq 0 \qquad a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$

- $a^{-n/m}$ $\quad n, m \in \mathbb{N}, \; m \neq 0 \qquad a^{-n/m} = \sqrt[m]{(1/a)^n}$

  $(a^{-1} = 1/a)$

- a^x per $x \in \mathbb{R}$: $\qquad a = 1, \; 1^x = 1$

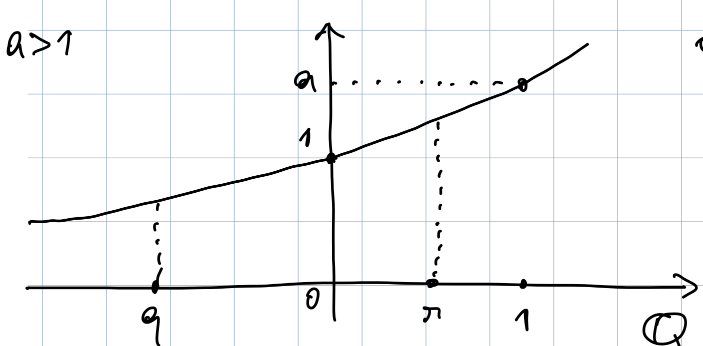
  $a > 1$: $\; a^x = \sup \{ a^q : q \in \mathbb{Q}, \; q < x \}$

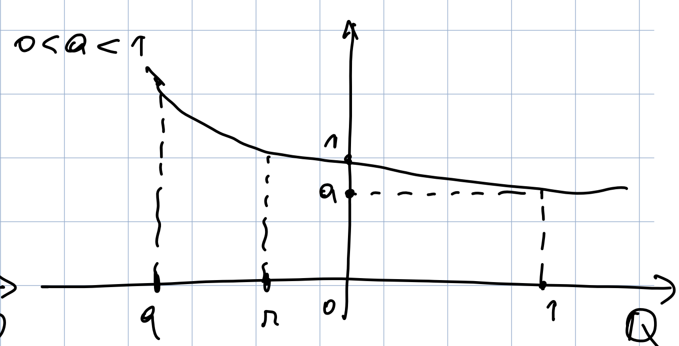
  $a < 1$: $\; a^x = \inf \{ a^q : q \in \mathbb{Q}, \; q < x \}$

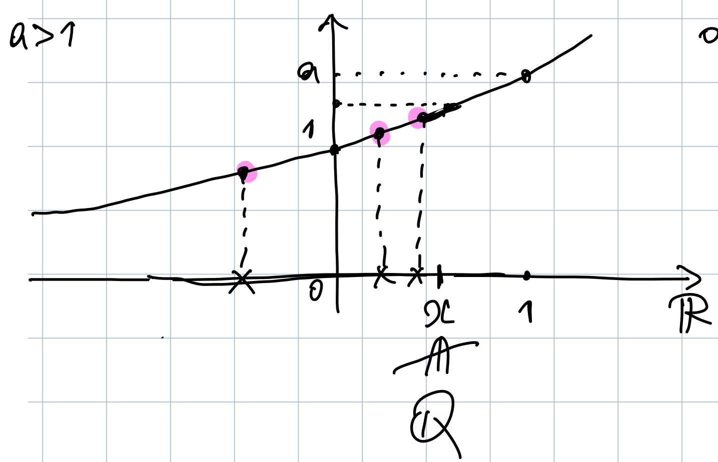
Ho costruito a^q $\; \forall q \in \mathbb{Q}$; fatto :

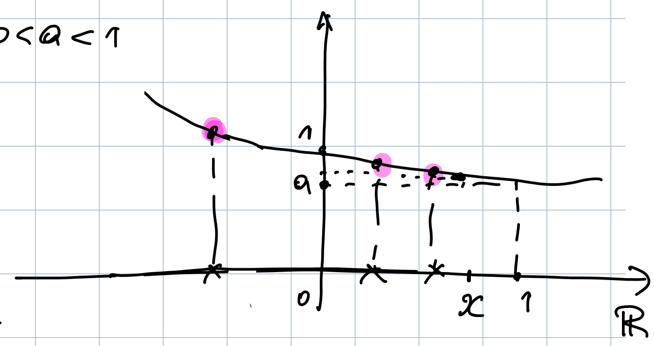
la funzione $q \longmapsto a^q$ è

- crescente se $a > 1$: $\; q < r \implies a^q < a^r$
- decrescente se $a < 1$: $\; q < r \implies a^q > a^r$







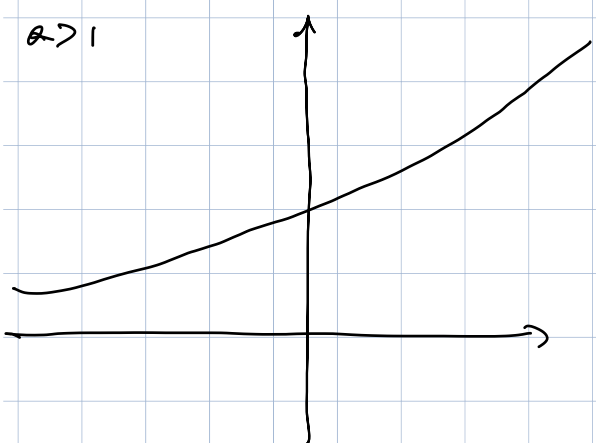


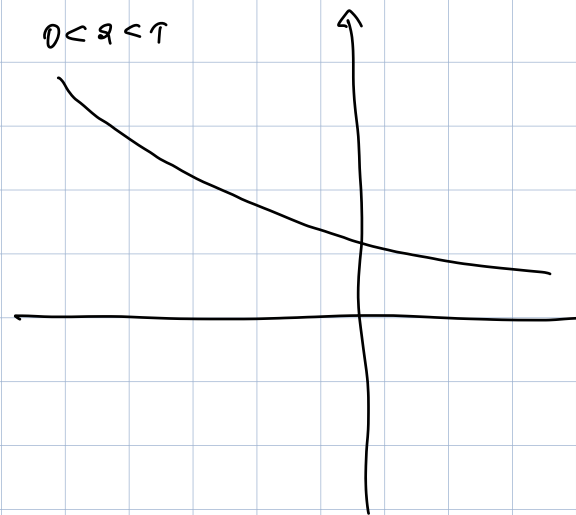
Definito a^x $\forall a \in \mathbb{R}$, $a>0$, $a \neq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

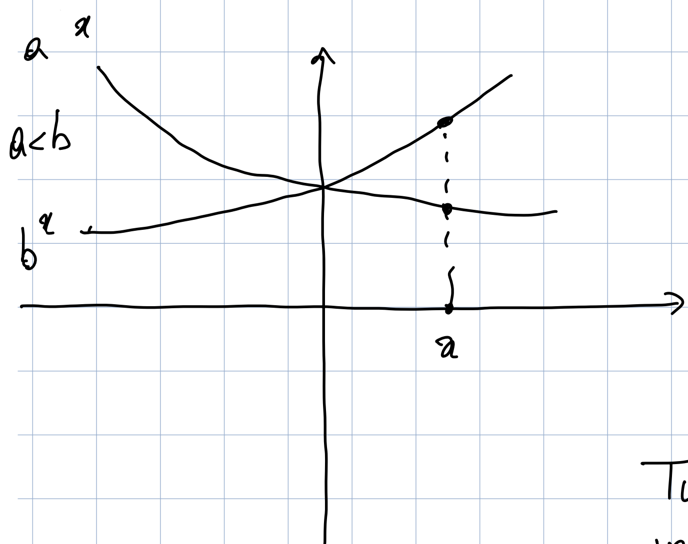
Proprietà:

- $a^0 = 1$, $1^x = 1$, $a^x > 0 \ \forall x$
- $a^x > 1$ se $a > 1$, $x > 0$ oppure $a < 1$, $x < 0$
  $a^x < 1$ se $a > 1$, $x < 0$ oppure $a < 1$, $x > 0$
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $x < y \Rightarrow$ $a^x < a^y$ se $a > 1$
  $a^x > a^y$ se $a < 1$

• $0<a<b \implies \begin{cases} a^x < b^x & \text{se } x>0 \\ a^x > b^x & \text{se } x<0 \end{cases}$





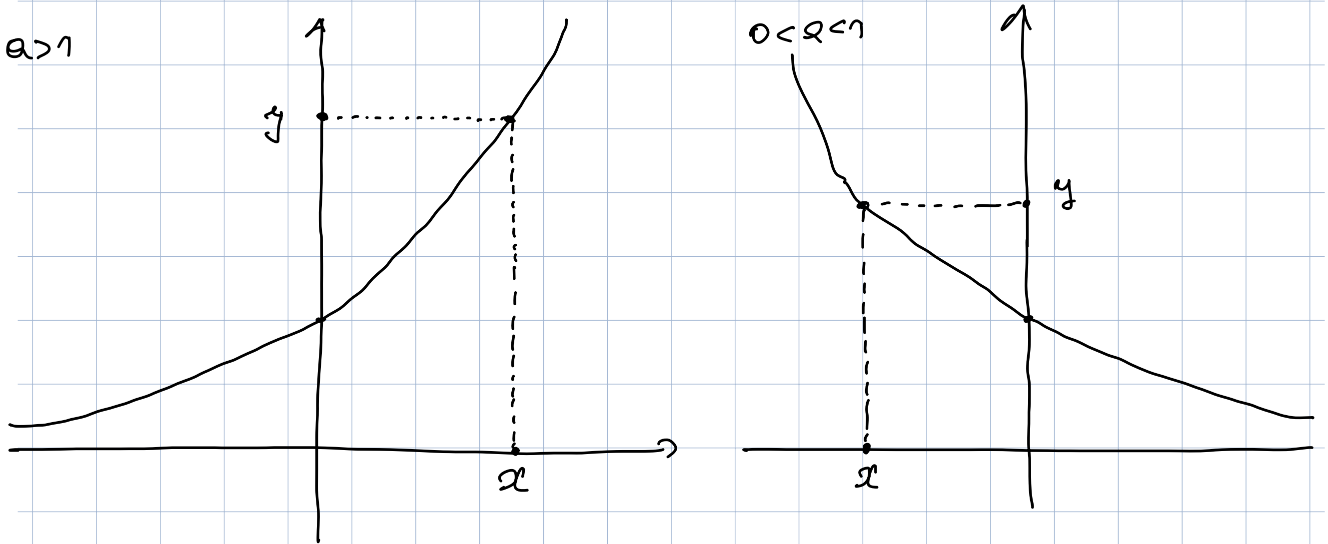


Tutte si possono provare verificandole prima algebricamente con $x \in \mathbb{Q}$ e poi usando la def con sup/inf per $x \in \mathbb{R}$.

Logaritmi: dato $a>0$, $a\neq 1$, $y\in\mathbb{R}$, $y>0$

chiamo $\log_a(y)$ l'unico $x\in\mathbb{R}$ t.c. $a^x = y$.

Fatto: esiste davvero:



unicità: facile dalla crescenza / decrescenza.

Es: $\log_7(7) = 1$ $\log_7(49) = 2$

$\log_{49}(7) = 1/2$

Fatti: $a^{\log_a(x)} = x$ $\forall x>0$ per def.

$\exp_a \circ \log_a = id_{\mathbb{R}_+}$

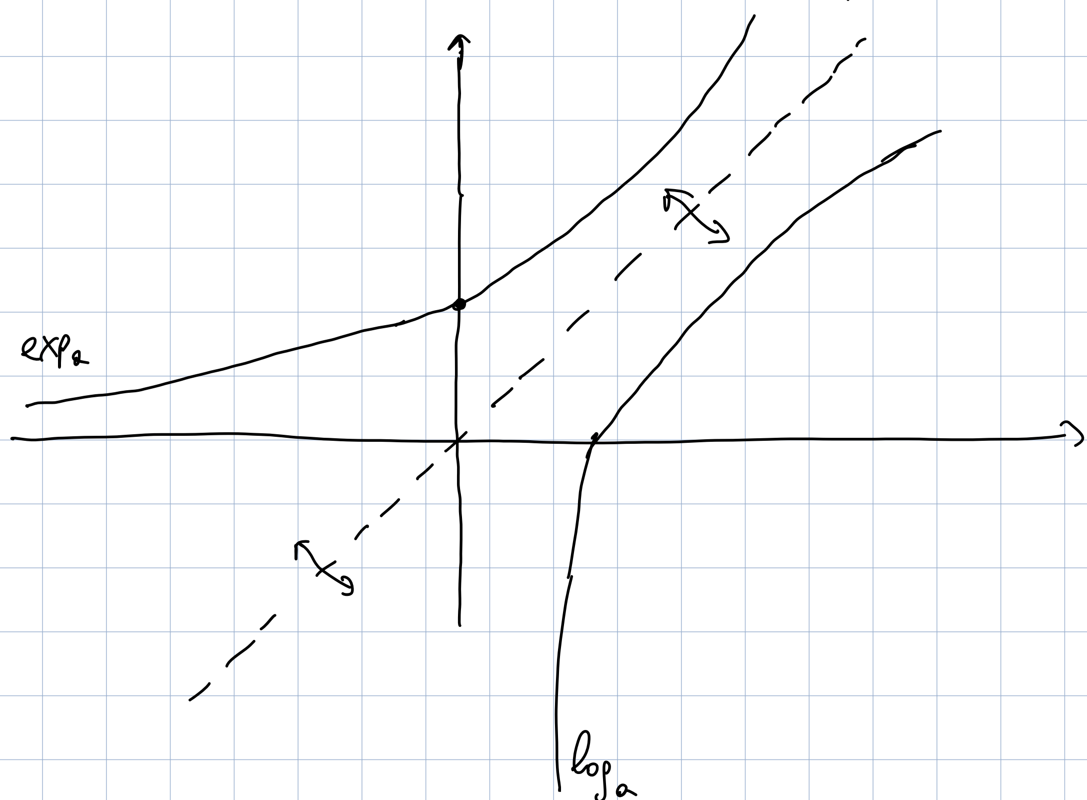
$\log_a(a^x) = x$ $\forall x\in\mathbb{R}$ per def.

$\log_a \circ \exp_a = id_{\mathbb{R}}$

Dunque: $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \{t \in \mathbb{R} : t > 0\} = \mathbb{R}_+$
$x \longmapsto a^x$

$\log_a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \log_a(x)$

sono l'inversa l'una dell'altra.



Proprietà:

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(x \cdot y)$ è quel numero z t.c. $a^z = x \cdot y$; voglio far vedere che se $w = \log_a(x) + \log_a(y)$ si ha $z = w$; cioè che $a^w = x \cdot y$; infatti

$$a^{w} = a^{\log_a(x) + \log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = x \cdot y . \blacksquare$$

- $$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$a^{-y} = \frac{1}{a^{y}}$$

- $$\log_a(x^{y}) = y \cdot \log_a(x)$$

$\log_a(x^y)$ è quello $z \in \mathbb{R}$ t.c. $a^z = x^y$;
posto $w = y \cdot \log_a(x)$ voglio vedere che $z = w$,
cioè $a^w = x^y$; infatti
$$a^{w} = a^{y \cdot \log_a(x)} = \left(a^{\log_a(x)}\right)^{y} = x^{y}. \blacksquare$$

- $$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

$$a^{\log_a(x)} = x$$
$$\Longrightarrow \log_b\left(a^{\log_a(x)}\right) = \log_b(x)$$
$$\log_a(x) \cdot \log_b(a) = \log_b(x) \Longrightarrow \dots \blacksquare$$

- $$\log_a(x) = \frac{1}{\log_x(a)}$$

- $$\log_{a^k}(x) = \frac{1}{k}\log_a(x)$$

<u>Esercizio</u>: dimo formula

$$\left[a^{k\cdot\left(\frac{1}{k}y\right)} = a^{y} \right]$$

———— ∘ ————

<u>Esercizio</u>: provare che $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$ per induzione su n.

PB: $n=0$

$$(x+y)^0 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} \cdot y^k$$

$$1 = \binom{0}{0} \cdot x^0 \cdot y^0 \quad \text{sì}$$

PB: $n=1$

$$(x+y)^1 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} \cdot y^k$$

$$x+y = \underbrace{\binom{1}{0} x^{1-0} \cdot y^0}_{x} + \underbrace{\binom{1}{1} \cdot x^{1-1} \cdot y^1}_{y}$$

PI: suppongo vera la tesi per un certo $n \in \mathbb{N}$ arbitrario e la dimostro per $n+1$.

Ipotesi induttiva: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Tesi induttiva: $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$

Infatti:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\cdot(x+y)^{n}$$

$$= (x+y)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^{k}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}}_{\text{sostituisco } k \text{ con } h-1 \text{ cioè pongo } h=k+1} + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^{k}$$

$$+ \underbrace{\sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} x^{n-(h-1)} y^{h}}_{\text{richiamo } h \text{ con } k} + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^{k}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^{k} + y^{n+1}$$

$$= 1\cdot x^{n+1} y^{0} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^{n+1-k} y^{k} + 1\cdot x^{0} y^{n+1}$$

$$\binom{n+1}{0} y^0 \qquad \binom{n+1}{k} \qquad \binom{n+1}{n+1} x^{n+1-(n+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

$\boxtimes$