UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 27/6/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Posto $V = \mathbb{R}_{\leqslant 1}[x]$ considerare $f : V \to V$ data da $f(p(x)) = p(8) + x \cdot p(3)$. Determinare il polinomio caratteristico di f, i suoi autovalori e una base che la diagonalizza.

2. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 4i & 3+i \\ -3+i & i \end{pmatrix}$ e una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

3. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per $[3:1:2]$ e $[4:5:-1]$ contiene $[4+t:-3:t^2+1]$.

4. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $x^2+2y^2+5z^2+6xy-2yz+2x+2y-4z+2=0$.

5. Per la curva $\alpha : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \log(t)+t^2 \\ 17t^2+12t \end{pmatrix}$ calcolare il segno della curvatura per ogni t.

6. Per la curva $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2t^2-t \\ 3t^2+t \end{pmatrix}$ calcolare $\int_\alpha (x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x)$.

7. Dire per quali $k, h \in \mathbb{R}$ la forma $\mathrm{e}^{4x^3y^2-5x^2y^3}\Big((kx^2y^2-10xy^3)\,\mathrm{d}x+(8x^3y+hx^2y^2)\,\mathrm{d}y\Big)$ risulta esatta.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Modulo di "Geometria" — Scritto del 27/6/23 — Esercizî

1. Considerare il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + 3y - z = 0$ e al variare di k la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 3k-1 & 9 \\ k & 1 & -10 \\ 2-k & 1 & 2k-12 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che l'espressione $f(x) = N \cdot x$ definisce per ogni k un'applicazione lineare $f : W \to W$.

(B) (3 punti) Scelta una base $\mathcal{B}$ di W esibire $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(C) (3 punti) Per $k = 1$ trovare gli autovalori di f e una base che la diagonalizza.

(D) (3 punti) Stabilire per quali k la f non è diagonalizzabile.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} k+2 & -2 & 1-k \\ -2 & 4 & 1 \\ k^2-5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Determinare i valori $k_0 < k_1$ di k per i quali esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di M.

(B) (2 punti) Determinare i segni degli autovalori di M per $k = k_0$.

(C) (2 punti) Provare che $\langle \cdot | \cdot \rangle_M$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ per $k = k_1$.

(D) (2 punti) Per il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ calcolare la norma associata al prodotto scalare del punto precedente.

(E) (3 punti) Per $k = k_1$ trovare gli autovalori di M e una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di M.

Risposte ai quesiti

3. ♢

1. $p_f(t) = t^2 - 4t - 5;\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5;\ v_1 = 4 - x,\ v_2 = 2 + x$

2. $\lambda_1 = 6i,\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3+i \\ 2i \end{pmatrix},\ \lambda_2 = -i,\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2i \\ 3-i \end{pmatrix}$

3. $t = 3$ e $t = -2$

4. Iperboloide ellittico (a due falde)

5. Positiva per $0 < t < 3$, nulla per $t = 3$, negativa per $t > 3$

6. 4

7. $k = 12,\ h = -15$

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Soluzioni degli esercizî

3. $\diamondsuit$

1.

(A) Posto $w = (2, 3, -1)$ si ha $w \cdot N = 2k \cdot w$.

(B) Ad esempio per $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ si ha $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 19 & 3k+26 \\ k-20 & -29 \end{pmatrix}$.

(C) $\lambda_1 = 0,\ v_1 = \begin{pmatrix} 29 \\ -19 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -10,\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(D) $2 \leqslant k \leqslant \frac{28}{3}$

2.

(A) $k_0 = -3$ e $k_1 = 2$

(B) Due positivi e uno negativo

(C) d_1, d_2, d_3 sono positivi

(D) $\sqrt{73}$

(E) $\lambda_1 = 2,\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 5,\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 8,\ v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$