UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 24/5/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Deteminare il più grande intervallo (a, b) su cui l'espressione $F(x) = \int_x^7 \log_3(t+5)\,\mathrm{d}t$ definisce una funzione $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, dire in quali punti di (a, b) esiste $F'(x)$ e calcolare $F'(4)$.

2. Calcolare $\int \frac{x^2}{x^2+2}\,\mathrm{d}x$.

3. Considerare la funzione $f : [1, \mathrm{e}] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \log(x)$. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando nello spazio intorno all'asse x il sottografico di f.

4. Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Calcolare l'angolo θ compreso tra i vettori $v_1 = (1, -2, 2)$ e $v_2 = (-1, 1, 0)$.

6. Trovare le soluzioni singolari e la soluzione generale dell'equazione differenziale $y' = \dfrac{\cos(2x)}{y^6}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato dopo i primi 45 minuti. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 24/5/23 — Esercizio

Considerare l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(e_1) = (1, 1, -2), \quad F(e_2) = (0, 3, -1), \quad F(e_3) = (-2, 1, 3)$$

con $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(A) (3 punti) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(F)$ e una di $\mathrm{Im}(F)$.

(B) (1 punto) Dire se F sia iniettiva e/o suriettiva.

(C) (2 punti) Scrivere la matrice di cambio base $A_{B,C}$ con $B = ((1, 0, -1),\ (0, 1, 0),\ (2, -3, 1))$ e $C = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ base canonica di $\mathbb{R}^3$. (Seguendo la convenzione adottata a lezione, $A_{B,C}$ è la matrice associata all'identità fissata la base B sul dominio e la base C sul codominio.)

(D) (3 punti) Scrivere la matrice associata a F rispetto alla base canonica C sul dominio e alla base $B = ((1, 0, -1),\ (0, 1, 0),\ (2, -3, 1))$ sul codominio.

(E) (1 punto) Trovare le coordinate del vettore $F(e_1 + e_2 - e_3)$ rispetto alla base B.

Risposte ai quesiti

1. $(a, b) = (-5, +\infty)$; $F'(x)$ esiste per ogni $x \in (-5, +\infty)$; $F'(4) = -2$

2. $x - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$

3. $\pi(\mathrm{e} - 2)$

4. $\mathrm{rk}(A) = 2$.

5. $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \frac{3}{2}\pi$

6. Non ci sono soluzioni singolari;
Soluzione generale $y(x) = \sqrt[7]{\frac{7}{2}\sin(2x) + c}$, con $c \in \mathbb{R}$, definita sugli intervalli di $\mathbb{R}$ in cui $\frac{7}{2}\sin(2x)+c \neq 0$

Soluzione dell'esercizio

(A) $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Span}\{(2,-1,1)\}$ e $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Span}\{(1,1,-2),\ (0,3,-1)\}$

(B) F non è né iniettiva né suriettiva

(C) $A_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(D) Se $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ è la matrice associata a F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia sul dominio sia sul codominio, allora la matrice richiesta è

$$A_{C,B} \cdot M = (A_{B,C})^{-1} \cdot M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 0 & 6 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(E) $F(e_1 + e_2 - e_3) = 5 \cdot (1,0,-1) + 0 \cdot (0,1,0) + (-1) \cdot (2,-3,1)$, ovvero le coordinare sono $(5,0,-1)$