UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 7/6/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Provare per induzione che $6^n - (-1)^n$ è multiplo di 7 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Trovare il modulo e l'argomento del numero complesso $z = -1 + i$.

3. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n + (-1)^n \cdot n^2}{\cos(n\pi) - 5n^2}$.

4. Provare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 2\cos(x) - 3x$ si annulla in uno e un solo punto.

5. Determinare l'ordine di zero in $x = 0$ della funzione $f(x) = x^2 \cdot \sin(x^3) \cdot \log(1 + x)$.

6. Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \dfrac{\log_3(1 + x^3)}{1 + x^2}$ si deduce che esiste $x \in (0, 2)$ con $f'(x) = \ldots$

7. Esibire lo sviluppo di Taylor al terzo ordine nel punto $x = 0$ per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \mathrm{e}^x \cdot \cos(x)$.

8. Calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 7/6/23 — Esercizio

Considerare l'espressione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1}.$$

(A) (1 punto) Determinare il più grande $D \subset \mathbb{R}$ su cui essa definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

(B) (1 punto) Calcolare i limiti di f agli estremi di D.

(C) (2 punti) Trovare i punti x di D in cui $f'(x)$ non esiste, specificandone la natura.

(D) (3 punti) Trovare i punti di massimo e di minimo relativo di f.

(E) (1 punto) Trovare gli intervalli su cui f è strettamente convessa e quelli su cui è strettamente concava.

(F) (1 punto) Trovare tutti gli asintoti del grafico di f.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. Passo base: $6^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0$ è multiplo di 7. Passo induttivo: supponiamo $6^n - (-1)^n = 7k$ con $k \in \mathbb{N}$. Allora

$$6^{n+1} - (-1)^{n+1} = 6 \cdot 6^n + (-1)^n = 6 \cdot (7k + (-1)^n) + (-1)^n = 7 \cdot (6k + (-1)^n)$$

è multiplo di 7

2. $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$

3. Non esiste

4. La f è continua, ha limite $\mp\infty$ in $\pm\infty$ e ha derivata strettamente negativa, dunque è strettamente decrescente. Dal secondo fatto segue che esiste $k > 0$ tale che $f(-k) > 0 > f(k)$. Dal primo insieme al teorema degli zeri che la f ne ha uno in $[-k, k]$. Dal terzo che non ce ne sono su $(-\infty, -k]$ e su $[k, +\infty)$ e che quello in $[-k, k]$ è unico

5. 6

6. $\frac{1}{5}$

7. $1 + x - \frac{1}{3}x^3$

8. $\sin(1)$

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = \mathbb{R}$

(B) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

(C) $x = 1$ e $x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$ punti di flesso a tangente verticale

(D) $x = 0$ punto di massimo relativo, $x = \frac{4}{3}$ punto di minimo relativo

(E) Convessa su quelli contenuti in $\left(-\infty, \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)\right)$ e in $\left(1, \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)\right)$, concava su quelli contenuti in $\left(\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right), 1\right)$ e in $\left(\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right), +\infty\right)$

(F) Obliquo destro e sinistro $y = x - \frac{2}{3}$