Ist Mat I - CIA 23/11/2022

Foglio 5

Es 2

e) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x^2-x-2}$

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, D?

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2+2x+1}{(x+1)(x-2)} \qquad D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1, 2\}$$

- Per quali $x \in D$ f è continua in x.

$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, f e g continue su $D \Rightarrow h$ è continua in ogni $x \in D$, $g(x) \neq 0$.

Quindi f è continua su D.

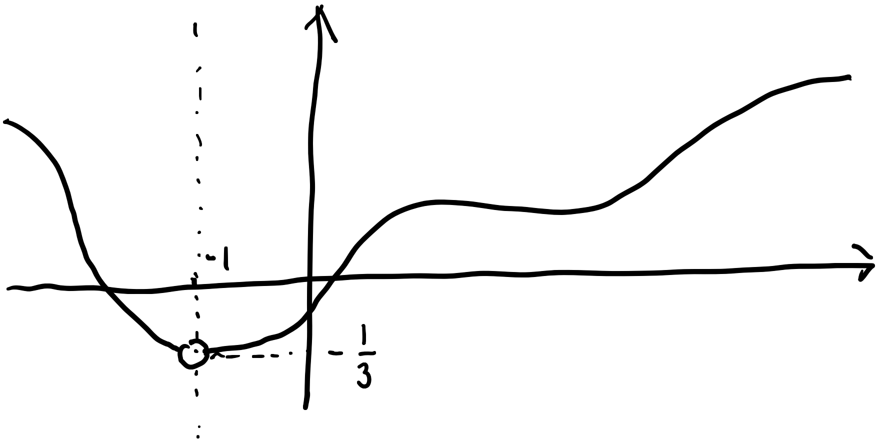
- Posso estendere f per continuità in $x=-1$ o $x=2$?

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^3+2x^2+2x+1}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^2+x+1}{x-2} = -\frac{1}{3}$$

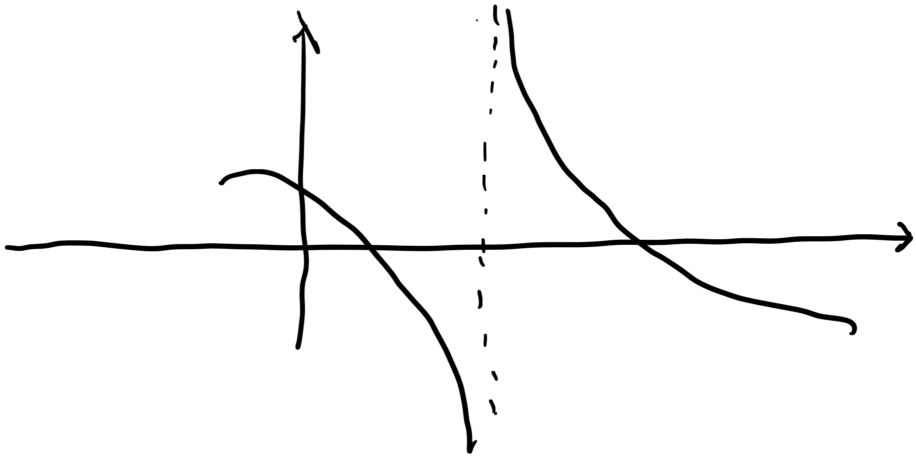
Esiste ed è un valore finito!

f si può estere in $x = -1$



$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x+1)}(x-2)} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{7}{0^+} = +\infty$$



f NON SI PUÒ ESTENDERE A $x=2$.

f) $f(x) = \mathrm{sgn}(x+1)\log(|\sin(x)|)$

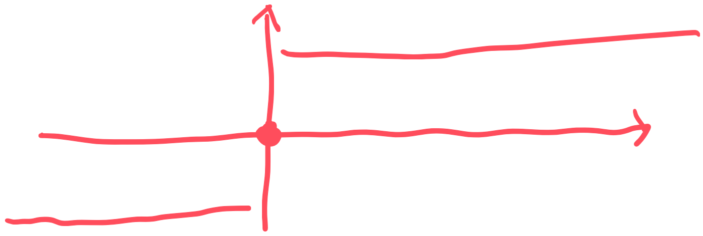
$$f(x) = \begin{cases} \log(|\sin(x)|) & x > -1 \\ 0 & x = -1 \\ -\log(|\sin(x)|) & x < -1 \end{cases}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : |\sin(x)| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

DOV'È CONTINUA?

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$



$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \qquad \operatorname{sgn}(0) = 0$$

PER $x>-1$, $x\in D$ f È CONTINUA IN x $\left(f(x) = \log(|\sin(x)|)\right)$

PER $x<-1$, $x\in D$ f È CONTINUA IN x $\left(f(x) = -\log(|\sin(x)|)\right)$

PER $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} -\log(|\sin(x)|) = \underbrace{-\log(|\sin(-1)|) \neq 0}$$

$\log(|\sin(x)|) = 0 \iff$

$|\sin(x)| = 1 \iff$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k\in\mathbb{Z}$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \log(|\sin(x)|) = \log(|\sin(1)|) \neq 0$$

QUINDI $\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x) \ (\neq f(0))$

QUINDI f NON È CONTINUA IN $x=-1$

f PUÒ ESSERE ESTESA A $x=0$?

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \log(|\sin(x)|) = -\infty$$

PER $x > -1$ $\quad f(x) = f(x+k\pi) \Rightarrow$ IL LIMITE $x \to k\pi$ DI f È SEMPRE $-\infty$.

g) $$f(x) = \frac{\cos(x)}{\log(x^2+1)}$$

- $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2+1>0,\ \log(x^2+1) \neq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x^2+1 \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

- DOV'È CONTINUA?

  cos, log, ... SONO CONTINUE (DOVE DEFINITE)

- QUINDI f È CONTINUA SU D.

- PUÒ ESSERE ESTESA A $x=0$?

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\log(x^2+1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

QUINDI f NON PUÒ ESSERE ESTESA A $x=0$ (ASINTOTO VERTICALE)

h) $$f(x) = \operatorname{Sgn}(x) \log\left(4^{\frac{\sin x}{x}} - 3\right)$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0,\ 4^{\frac{\sin x}{x}} - 3 > 0\right\}$$ ASPETTIAMO.

PUÒ ESSERE ESTESA A $x = 0$?

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x) \log\left(4^{\frac{\sin x}{x}} - 3\right) = ?$$