Ist. Mat I - CIA

2/11/2022

Foglio 3

Es 3

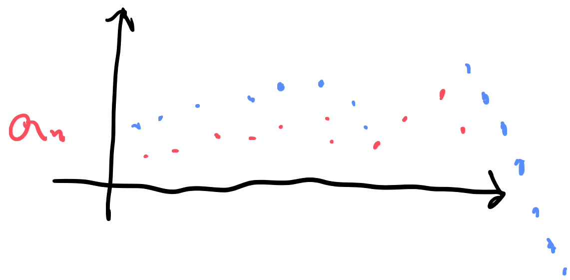
b) $$a_n = (-1)^n \frac{\cos n}{n^2-n}$$

SE $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$|a_n| = \left|\frac{\cos n}{n^2-n}\right| \leq \frac{1}{|n^2-n|} \xrightarrow{n\to\infty} "\frac{1}{\infty}" = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

c) $$a_n = \underbrace{-\sqrt{n}}_{\to -\infty} - \underbrace{3|\sin n|}_{\geq 0} + \frac{1}{n+1} \to 0$$



$$0 \leq |\sin n| \leq 1$$

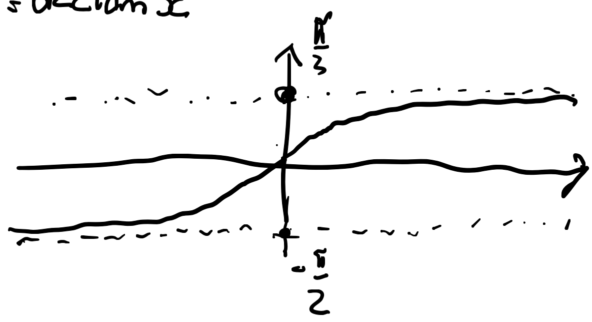
$$-3|\sin n| \leq 0$$

$$a_n \leq -\sqrt{n} + 0 + \frac{1}{n+1} = b_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

d) $$a_n = \frac{\arctan(n)}{n^2-2n}$$

$f(x) = \arctan x$



$$a_n \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2-2n} = b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$a_n \geq \frac{-\frac{\pi}{2}}{n^2-2n} = c_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\underset{\downarrow\atop 0}{c_n} \leq a_n \leq \underset{\downarrow\atop 0}{b_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

J) $$a_n = \frac{\left[\sqrt{n^2+2n-3}\,\right] - 2n}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n^2} \underset{n>2}{\leq} \sqrt{n^2+2n-3} \leq \sqrt{n^2+2n+1}$$

$$\sqrt{n^2} = n \qquad \sqrt{n^2+2n+1} = n+1$$

$$\underbrace{\frac{n-2n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}}_{b_n} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{n+1-2n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}}_{c_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{-1}{1} = -1$$

$\Rightarrow$ TEOREMA CONFRONTO $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$

(k) $a_n = \sqrt{n^2+\sqrt{n}-1} - \sqrt{n^2+1}$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\infty \qquad \infty$$

$$a_n = \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}-1} - \sqrt{n^2+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}-1} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}-1} + \sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{n^2+\sqrt{n}-1 - (n^2+1)}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}-1} + \sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}-1} + \sqrt{n^2+1}} = \text{"} \frac{\infty}{\infty} \text{"}$$

$$= \frac{\sqrt{n}\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n(n+n^{-\frac{1}{2}}-n^{-1})} + \sqrt{n(n+n^{-1})}}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{n}}\overbrace{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)}^{\to 1}}{\cancel{\sqrt{n}}\underbrace{\left(\sqrt{n + \underbrace{n^{-\frac{1}{2}}}_{\to 0} - \underbrace{n^{-1}}_{\to 0}} + \sqrt{n + \underbrace{n^{-1}}_{\to 0}}\right)}_{\to \infty}} = 0$$

FOGLIO 4

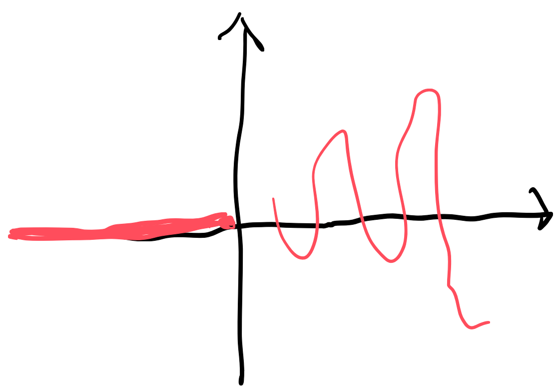
Es 1

a) $$f(x) = \frac{x + |x|}{x^2(x-3)}$$

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, x \neq 3\}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2(x-3)} & x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{0}{x^2(x-3)} & x < 0 \end{cases}$$



ASINTOTI ORIZZONTALI

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 0 = 0 \quad \Rightarrow$$

LA RETTA $y = 0$ È ASINTOTO ORIZZONTALE

$x \to -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{2x}^{\text{GRADO } 1}}{\underbrace{x^2(x-3)}_{\text{GRADO } 3}} = 0 \Rightarrow$$

LA RETTA $y=0$ È ASINTOTO ORIZZ. $x\to+\infty$

ASINTOTI VERTICALI

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}(x-3)} = -\infty$$

$x=0$ È ASINTOTO VERTICALE $x\to 0^+$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2}{x(x-3)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{2}{x(x-3)} = +\infty$$

$x=3$ È ASINTOTO VERTICALE.

CALCOLO DIFFERENZIALE

SIA $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$

DEF f È DERIVABILE IN c SE ESISTE FINITO IL LIMITE

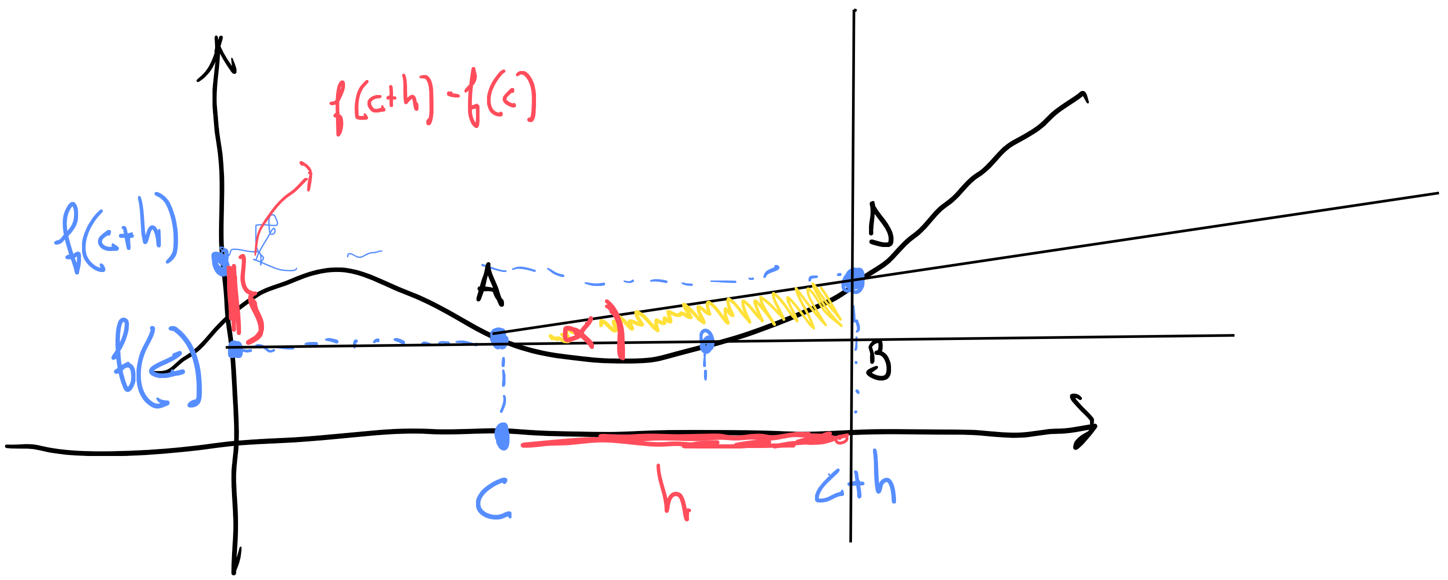
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$\to$ RAPPORTO INCREMENTALE

IN TAL CASO

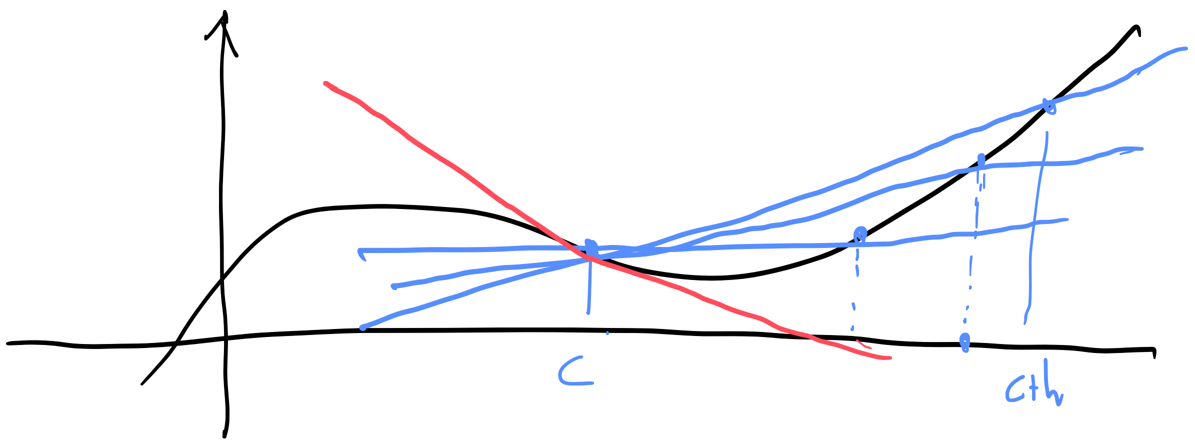
$$f'(c) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

È LA DERIVATA (PRIMA) DI f IN c.



OSS • IL RAPPORTO INCREMENTALE È LA TANGENTE DI α, L'ANGOLO $B\hat{A}D$.

• IL RAPPORTO INCREMENTALE È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA PER $(c, f(c))$ E $(c+h, f(c+h))$.



- $f'(c)$ È IL COEFFICENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f IN $(c, f(c))$.

- SE $f(x)$ È LA POSIZIONE DA UN CORPO AL TEMPO x ALLORA $f'(c)$ È LA VELOCITÀ ISTANTANEA AL TEMPO c.

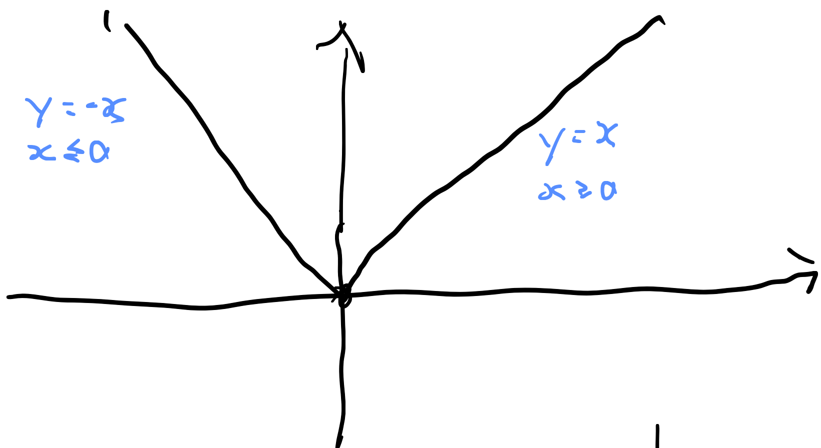
DEF SE f È DERIVABILE IN OGNI $c \in I$ ALLORA DICIAMO CHE f È DERIVABILE SU I.

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x)$$

f' È LA DERIVATA (PRIMA) DI f.

ES FUNZIONE NON DERIVABILE IN 0.

$f(x) = |x|$



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \begin{cases} \nearrow \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \\ \searrow \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{cases}$$

LIMITE SX E DX NON COINCIDONO, QUINDI IL LIMITE $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ NON ESISTE.

ALGEBRA DELLE DERIVATE

SIANO $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ DERIVABILI SU I, SIA $k \in \mathbb{R}$

PROP

1) $f+g$ È DERIVABILE SU I, E

$$(f+g)' = f' + g'$$

2) kf È DERIVABILE SU I, E

$$(kf)' = k \cdot f'$$

LINEARITÀ DELLA DERIVATA

3) $f \cdot g$ È DERIVABILE SU I, E

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

REGOLA DI LEIBNITZ

4) SE $g \neq 0$ $\frac{f}{g}$ È DERIVABILE SU I (SE $g(x) \neq 0$, PER $x \in I$)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

DIMOSTRIAMO 3. SIA $c \in I$.

$$\frac{(f\cdot g)(c+h)-(f\cdot g)(c)}{h} = \frac{f(c+h)g(c+h)-f(c)g(c)}{h} =$$

$$\overset{!}{=} \frac{f(c+h)g(c+h) - f(c)g(c+h) + f(c)g(c+h) - f(c)g(c)}{h}$$

$$= g(c+h)\frac{f(c+h)-f(c)}{h} + f(c)\frac{g(c+h)-g(c)}{h}$$

RAPPORTI INCREMENTALI

USO CHE f E g SONO DERIVABILI IN c

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(c+h)-(f\cdot g)(c)}{h} = g(c)\cdot f'(c) + f(c)\cdot g'(c)$$

E HO SCELTO $c \in I$ IN MODO ARBITRARIO, QUINDI IL LIMITE ESISTE FINITO PER OGNI $c \in I$ E HO

$$(f\cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

$\square$

OSS LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE COSTANTE ESISTE ED È LA FUNZIONE COSTANTE 0.

SIA $f(x) = K$. PER $x \in I$

$$(f\cdot g)'(x) = (K\cdot g)'(x) \overset{2}{=} K\,g'(x)$$

$$(f\cdot g)'(x) \overset{3}{=} f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

$$= f'(x)\,g(x) + K\,g'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{K\,g'(x)} = f'(x)\,g(x) + \cancel{K\,g'(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x)\,g(x) = 0$$

g È ARBITRARIA, NON LA FUNZIONE COSTANTE 0.

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 0 \qquad \text{PER OGNI } x \in I$$