Ist. Mat. I - CIA
13/10/22

$z^k = 1$ ha k soluz. $z \in \mathbb{C}$

$$z = e^{2h\pi/k \cdot i} \qquad h = 0, \dots, k-1$$

$z^k = w \qquad w \in \mathbb{C}, w \neq 0$

$w = \eta \cdot e^{i\alpha} \qquad z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

$$\begin{cases} \rho^k = \eta \\ k \cdot \vartheta = \alpha + 2h\pi \quad h \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt[k]{\eta} \\ \vartheta = \dfrac{\alpha + 2h\pi}{k} \quad h = 0, \dots, k-1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ esattamente k soluzioni

Teo fond. dell'algebra: ogni $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ non costante ha almeno una radice.

Dimo: difficile.

Fatto: la divisione tra polinomi funziona anche in $\mathbb{C}[z]$

$\Longrightarrow$ vale teo. Ruffini: $p(z)$ ha radice w $\Longleftrightarrow$ divisibile per $z - w$

$\Rightarrow$ w ha molteplicità m se $p(z) = (z-w)^m \cdot q(z)$
$q(w) \neq 0$

$\Rightarrow$ ogni $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ è
$$p(z) = a \cdot (z-w_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z-w_k)^{m_k}$$
$$a \in \mathbb{C}, \quad m_1 + \ldots + m_k = \deg(p(z))$$

"ogni polinomio di grado n ha n radici contate con la molteplicità"

Esempio: $az^2 + bz + c = p(z)$ ha sempre due radici (eventualmente una di molt. 2)

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

ha sempre due radici quadrate

(esempio numerico dopo).

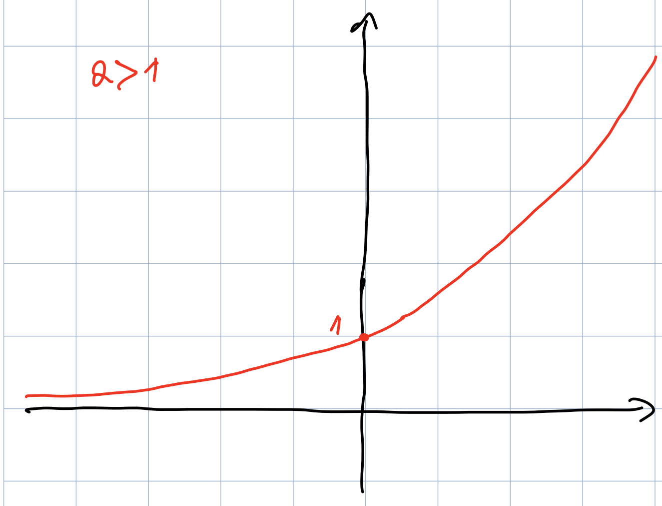
Parleremo spesso di $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

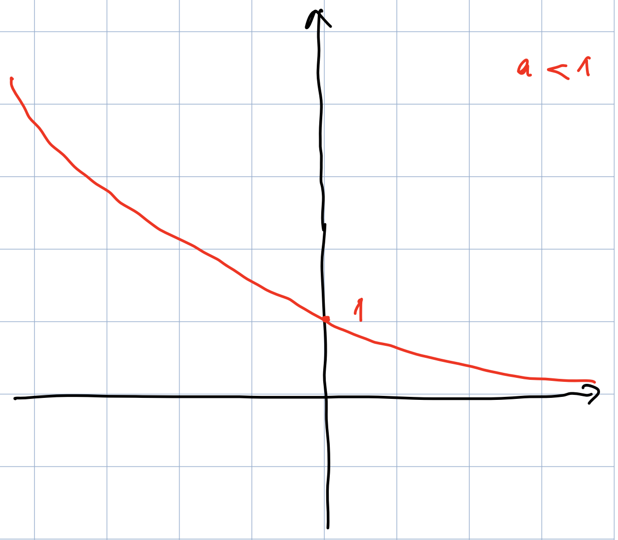
$I =$ (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$
$(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

Proprietà che f può (o meno) avere:

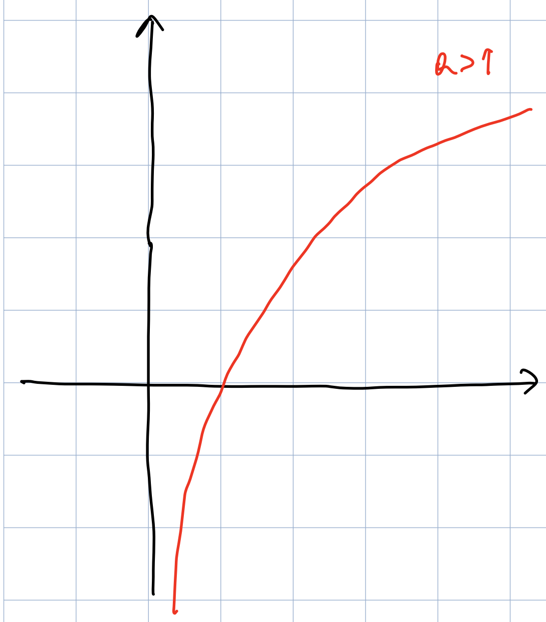
- lim. sup. se $\exists K$ t.c. $f(x) \leq K \ \forall x \in I$
- lim. inf se $\exists K$ t.c. $f(x) \geq K \ \forall x \in I$
- pari se $I = (-a, a)$ oppure $[-a, a]$ $a \in \mathbb{R}, a = +\infty$
  $f(-x) = f(x)$
- dispari se $I = (-a, a)$ e $f(-x) = -f(x)$
- monotona crescente se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
  strettamente crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  decrescente se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
  strettamente decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- periodica di periodo $T > 0$ se $f(x+T) = f(x) \ \forall x$

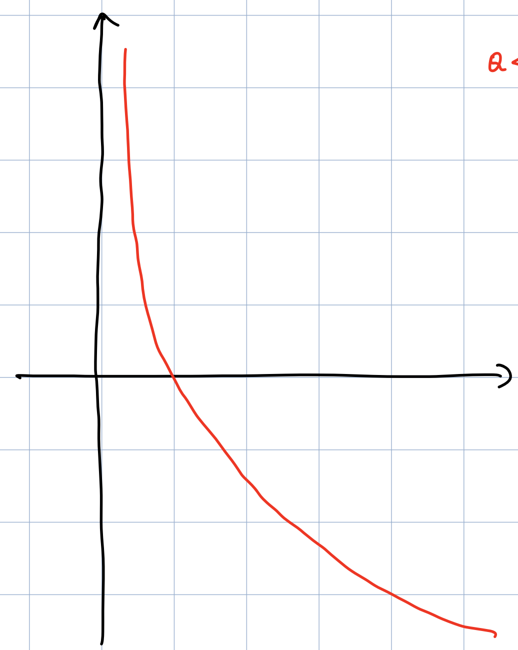
$f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$



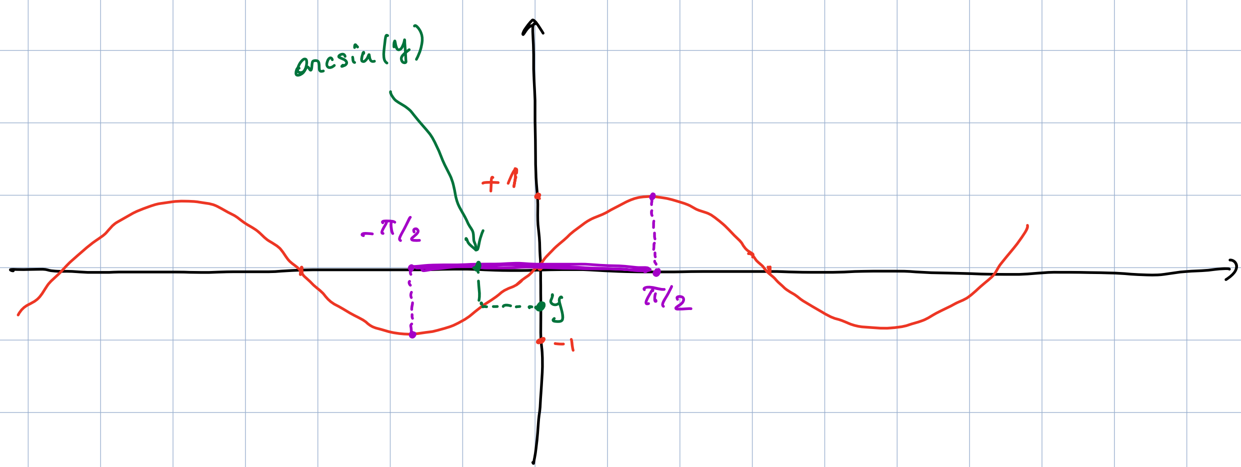


$f(x) = \log_a(x) \qquad a>0, \quad a \neq 1$





$f(x) = \sin(x)$

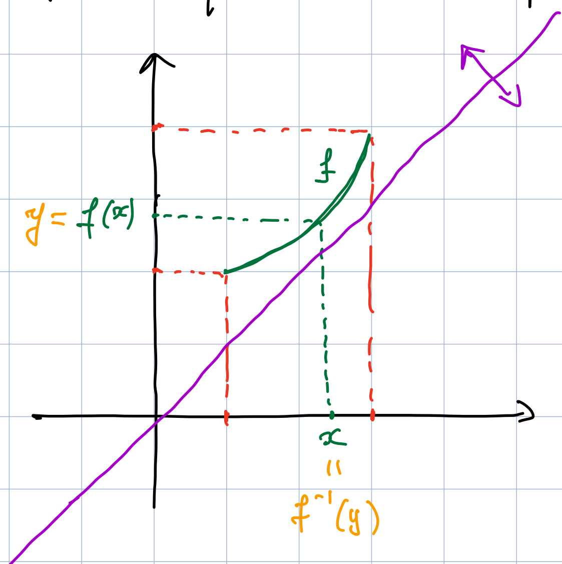


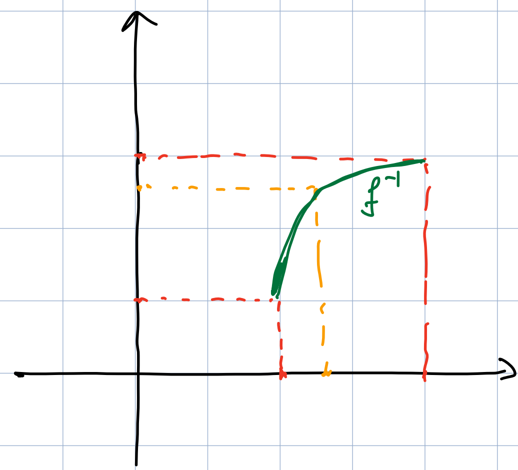
Oss: $[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1,1]$

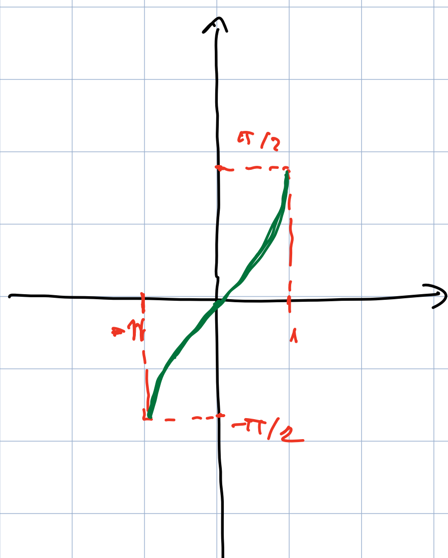
$x \longmapsto \sin(x)$ è invertibile (strettamente crescente)

Chiamo $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ inversa di essa.

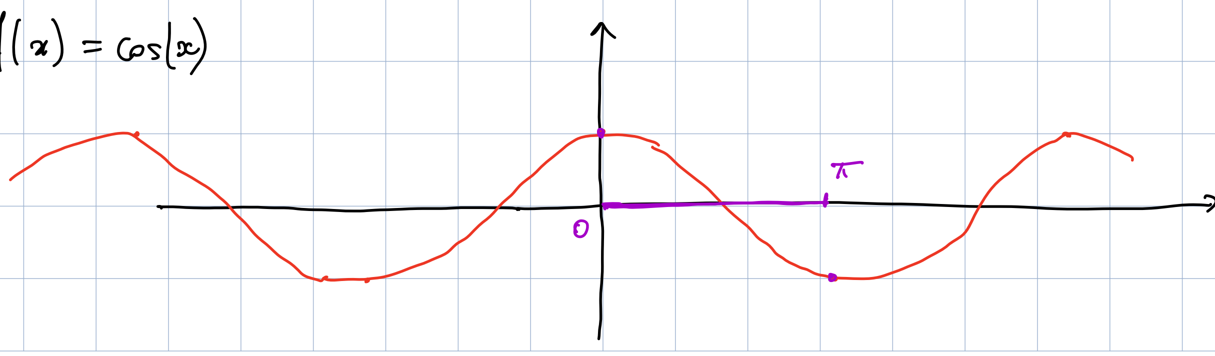
Oss: in generale se $f: [a,b] \to [c,d]$ invertibile il grafico di $f^{-1}: [c,d] \to [a,b]$ si ottiene riflettendo quello di f rispetto alla bisettrice di I/III quadrante.





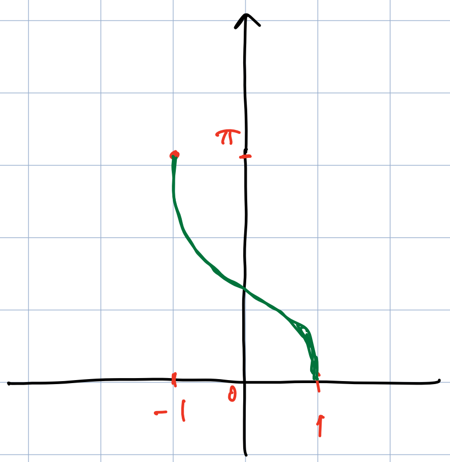


$f(x) = \cos(x)$



arccos inversa del cos su $[0,\pi]$

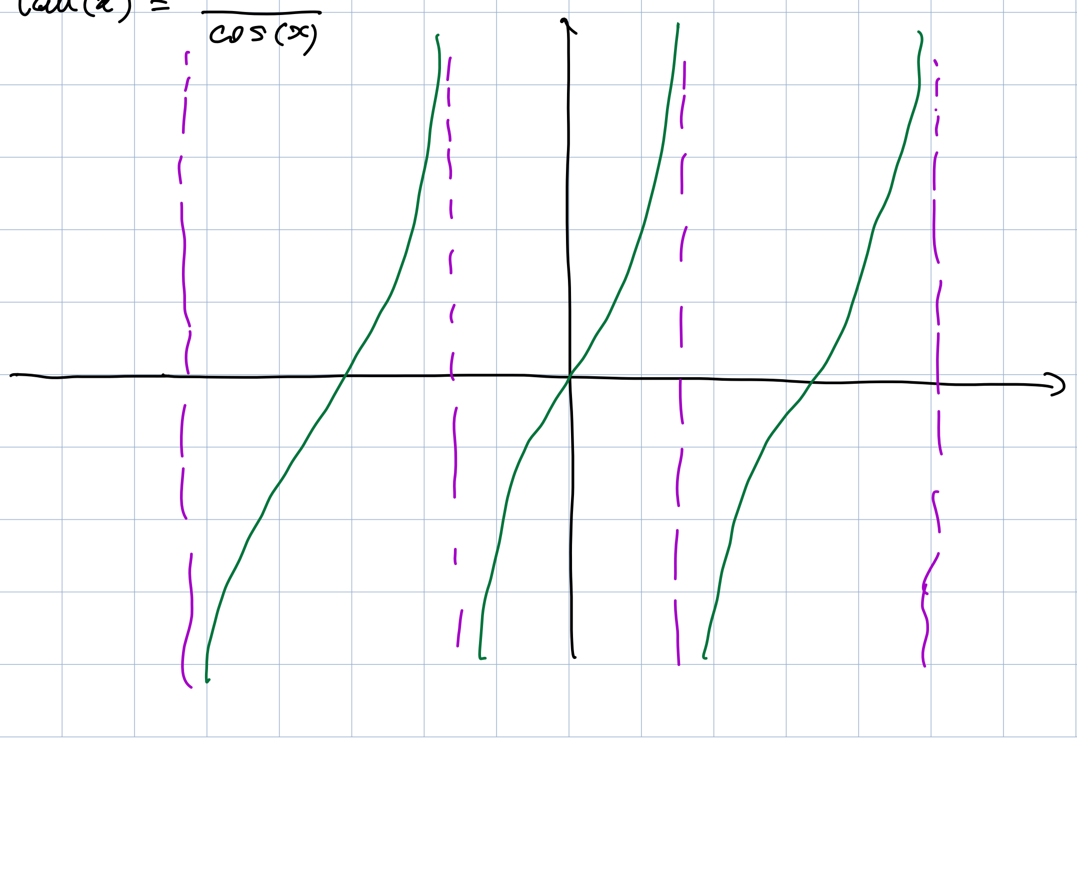
$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$



$\tan : \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

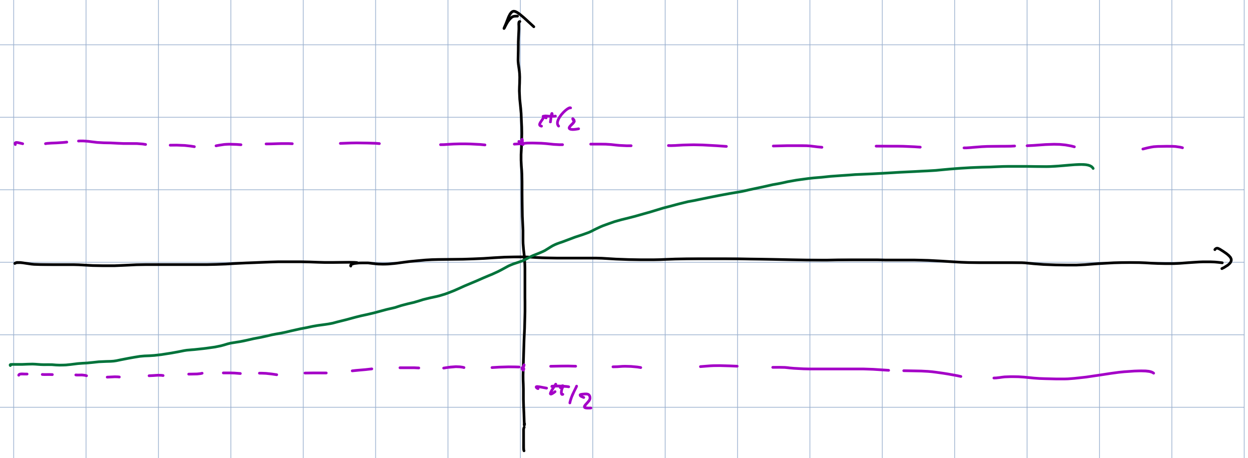
$\ldots (-\frac{3}{2}\pi, \pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup \ldots$

$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$



su $(-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ è invertibile

chiamo arctan : $\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ l'inversa



cot : $\{x \in \mathbb{R} : x \neq k \cdot \pi\} \to \mathbb{R}$ $\qquad \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

arctan : $\mathbb{R} \to (0, \pi)$

Il numero di Nepero e

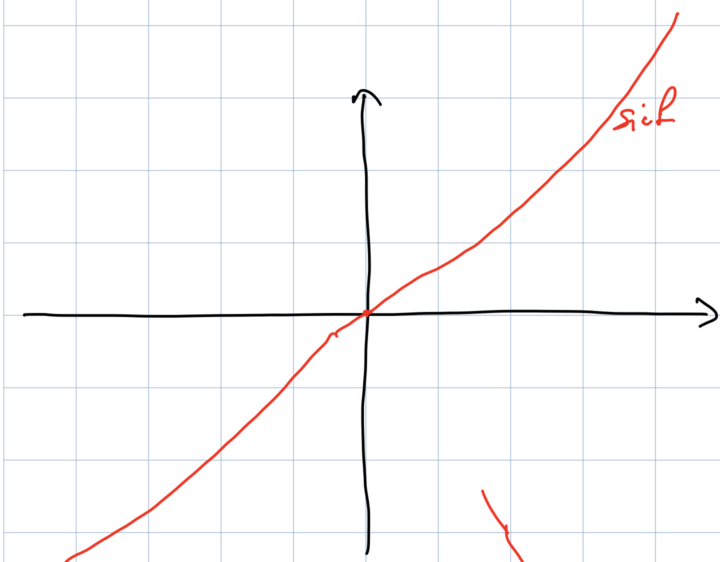
$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$
$$= 2{,}71\dots$$

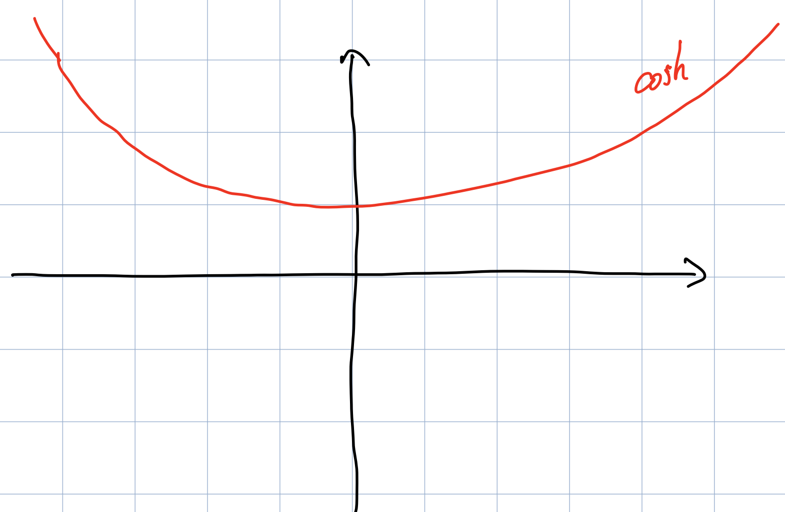
Def: chiamo logaritmo naturale $\underset{\overset{\|}{\ln}}{\log}$ la funzione logaritmo in base e

ed esponenziale naturale exp $\qquad \exp(x) = e^x$

Funzioni iperboliche

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$





trigonometriche: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

iperboliche: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

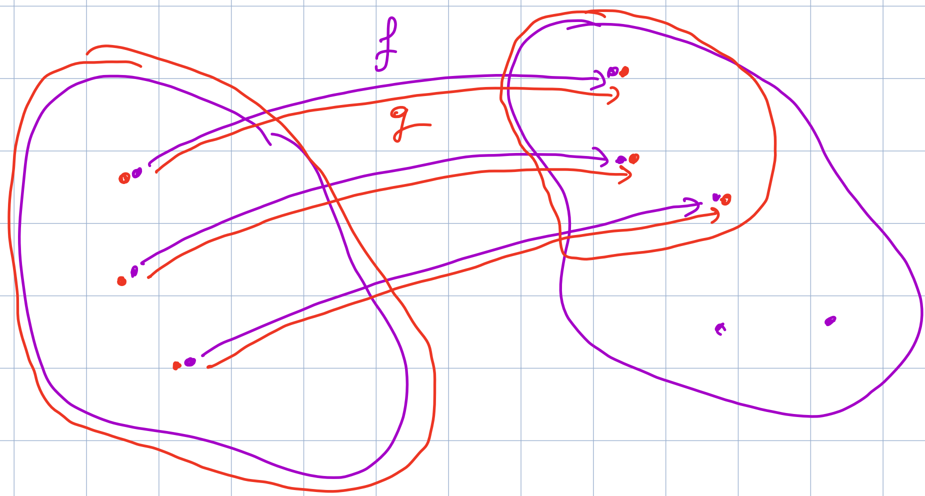
<u>esercizio</u>

Attenzione: a pag. 77 la def. di invertibile è sbagliata

Oss: se $f: A \to B$ iniettiva la funzione

$$\begin{aligned} g: A &\to \mathrm{Im}(f) \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

è invertibile



$$2iz^2 + (7-i)z - 3 - 3i = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4ac &= (7-i)^2 - 4(2i)(-3-3i) \\ &= 49 - 14i - 1 + 24i - 24 \\ &= 24 + 10i \end{aligned}$$

Cerco $\sqrt{\Delta} = x + iy$

voglio $(x+iy)^2 = \Delta$

$$x^2 + 2ixy - y^2 = 24 + 10i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ xy = 5 \end{cases} \qquad x = 5 \quad y = 1$$

perciò $\sqrt{\Delta} = \pm(5+i)$

$$z_{1,2} = \frac{-7+i \pm (5+i)}{4i} = \begin{cases} \frac{-2+2i}{4i} = \frac{-1+i}{2} \\ \frac{-12}{4i} = 3i \end{cases}$$

Successioni e loro limiti

Successione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oppure $\mathbb{C}$)

Scriviamo a_n invece che $a(n)$.

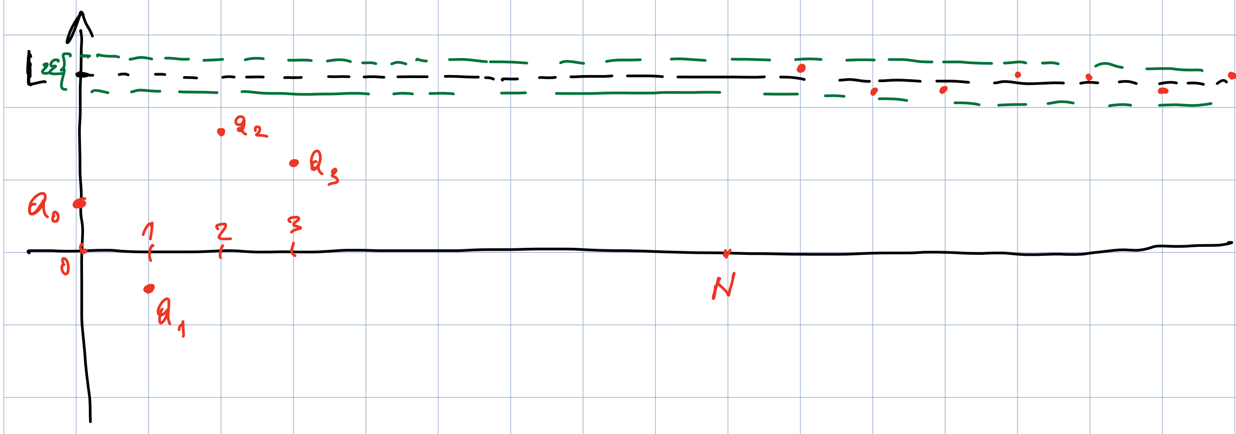
$$a = (a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, a_3 \dots)$$

Talvolta: $a = (a_n)_{n=n_0}^{\infty}$

Es: $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Idea: per n molto grande può accadere che il valore di a_n tende a stabilizzarsi cioè si avvicina sempre più a un certo valore.

Def: data $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $L \in \mathbb{R}$, diciamo $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ t.c. $|a_n - L| < \varepsilon$ $\forall n > N$



Es: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

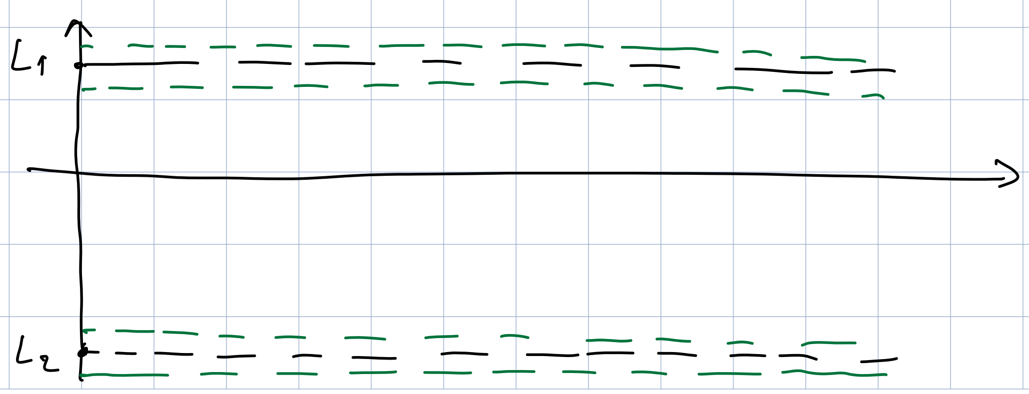
Affermo che $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Dato $\varepsilon > 0$ cerco N t.c. $\left| \dfrac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ per $n > N$

cioè $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ cioè $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$;

ciò è vero per $n > N$ prendendo qualsiasi $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

Oss: il limite se esiste è unico.



Def: dico che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ se
$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists N$ t.c. $a_n > K$ per $n > N$;
$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ se $\exists K \in \mathbb{R}\ \exists N$ t.c.
$a_n < K$ per $n > N$.

Esempio: $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$

Dato $K \in \mathbb{R}$ cerco N t.c.
$n^2 > K \quad \forall n > N$
se $K \leq 0$ sempre vero
se $K > 0$ voglio $n > \sqrt{K}$
vero se prendo qualsiasi $N > \sqrt{K}$.

Esempi: $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)$ non esiste

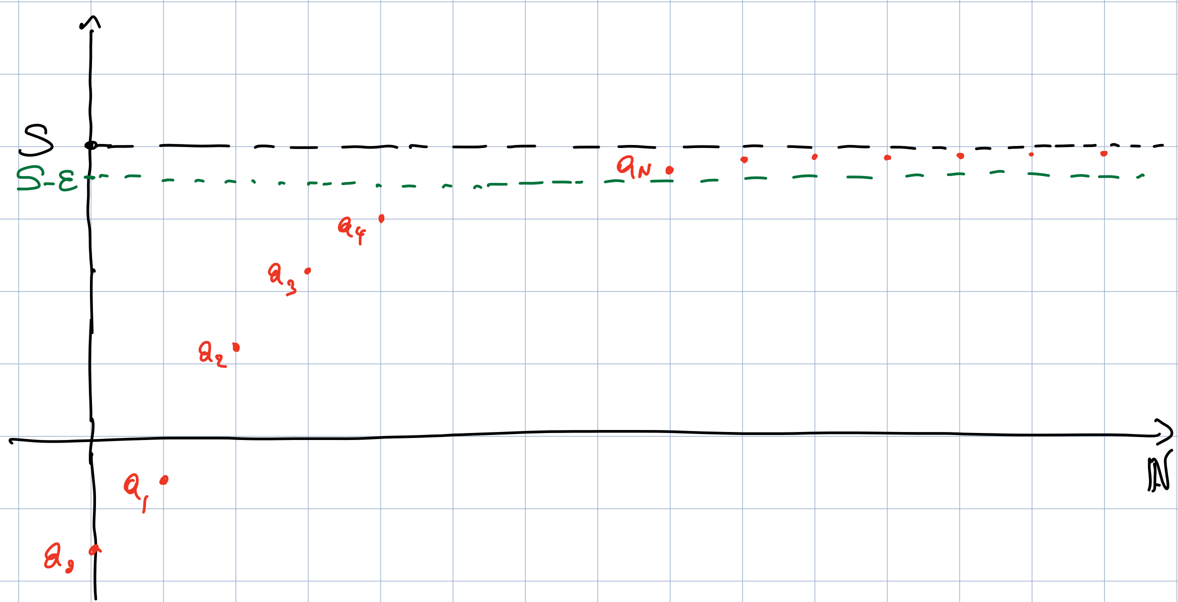
$\lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} n^{-3} = 0$

Def: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ è monotona
crescente se $a_n \geq a_m$ per $n > m$
decrescente se $a_n \leq a_m$ per $n > m$.

Fatto: una successione monotona ha sempre limite finito oppure $\pm\infty$.

Spiego: (a_n) crescente: due casi

- $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato $\Rightarrow \exists S = \sup(a_n)$



- se $\{a_n\}$ non è sup. limitato allora $\lim = +\infty$.

Fatti

- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente ed è limitata
- $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Oss: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{k} b_n\right)}_{a_k}$ (può esistere o meno)

Proprietà dei limiti di successioni:

"$\underbrace{\lim (a_n+b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n)}$ se finiti"

se (a_n) ha limite A e (b_n) ha limite B
allora (a_n+b_n) ha limite $A+B$

$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$ se finiti

$\lim (-a_n) = -\lim(a_n)$ se finito

$\lim \left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{\lim(a_n)}$ se $\neq 0$

Altri casi in cui si può concludere:

- $\underbrace{L + (+\infty) = +\infty}$ $(+\infty + \infty = +\infty)$

  se $\lim(a_n) = L \in \mathbb{R}$, $\lim(b_n) = +\infty$
  allora $\lim(a_n+b_n) = +\infty$

  $L + (-\infty) = -\infty$ $(-\infty - \infty = -\infty)$
- $L \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ se $L > 0$

- $L \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ se $L < 0$

Forme indeterminate (non si può concludere a priori)

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$.