Ist. Mat. I - CIA

12/10/22

Foglio 2 (2) (b), (c)

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{m} \binom{n}{2} = \frac{1}{6} m(m-1)(m+1)$

$$\sum_{n=2}^{m} \binom{n}{2} = \sum_{n=2}^{m} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{m} n^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{m} n$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} m(m+1)(2m+1) - 1 - \left(\frac{1}{2} m(m+1) - 1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{6} m(m+1)\left(2m+1-3\right) = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{6} m(m+1) \cancel{2} \cdot (m-1).$$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \binom{n-i}{k-i+1} = \binom{n}{k} - \binom{n-m}{k-m}$

Ha senso per $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $m \leq k$.
Lo verifico per induzione finita su $m = 1, \dots, k$.

Passo base $m = 1$: $\displaystyle\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1}$
identità fondamentale

Suppongo che $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \binom{n-i}{k-i+1} = \binom{n}{k} - \binom{n-m}{k-m}$ per $m < k$

Devo vedere che $\sum_{i=1}^{m+1} \binom{n-i}{k-i+1} = \binom{n}{k} - \binom{n-m-1}{k-m-1}$

$\parallel$

$$\binom{n}{k} - \binom{n-m}{k-m} + \binom{n-m-1}{k-m-1+1}$$

uguali per l'identità fondamentale

③ (a) $X = \mathbb{Q}$ $\quad A = \{x \in X : x > 0,\ 2^x < 3\}$

(b) $\mathbb{Q}$ $\quad \leq$

(c) $\mathbb{R}$ $\quad <$

(d) $\mathbb{R}$ $\quad \leq$

inf. lim. tutti ; inf $= 0$ per tutti ; no min per tutti

sup. lim. tutti perché ad esempio $x < 2$ $\forall x \in X$

Se esiste un estremo superiore S deve avvenire che $2^S = 3$:

se $2^S < 3$ prendendo ε molto piccolo > 0 avrei $2^{S+\varepsilon} < 3 \Rightarrow S + \varepsilon \in A$

se $2^S > 3$ prendendo ε molto piccolo > 0 avrei $2^{S-\varepsilon} > 3 \Rightarrow S - \varepsilon \geq a$ $\forall a \in A$

(a), (c) : no max

(a) Mi chiedo se esiste $S = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ t.c. $2^S = 3$

$2^{p/q} = 3$ $\qquad 2^p = 3^q$ $\qquad$ <u>No</u>

(b) Né max né sup.

(c), (d) $\sup = \log_2(3)$

(d) $\max = \log_2(3)$

$A = (0,1)$ $\quad$ $\sup(A) = 1$

$\max(A)$ non esiste

$A = (0,1]$ $\quad$ $\sup(A) = \max(A) = 1$

(e) $X = \mathbb{R}$ $\quad$ $A = \{ x>0,\ \frac{1}{x} < 4 \}$

$\{ x>0,\ x > \frac{1}{4} \}$

$\{ x > 1/4 \} = (1/4, +\infty)$

$\inf = 1/4$ no min

no sup. lim.

(f) $X = \mathbb{R}$ $\quad$ $A = \{ x>0,\ \frac{1}{x} \geq 4 \}$

$(0, 1/4]$

$\inf = 0$ no min

$\sup = \max = 1/4$

(g) $X = \mathbb{R}$ $\quad$ $A = \{ x : \exists y \in \mathbb{R}$ t.c. $x = 3^y \}$

$= (0, +\infty)$ ...

(h) $X = \mathbb{Q}$ $\quad A = \{x > 0,\ x^2 > 5\}$ no inf ...

(i) $\mathbb{R}$ $\quad A = \{x > 0,\ x^2 > 5\}$ $\quad (\sqrt{5}, +\infty)$ ...

(j) $X = \mathbb{Q}$ $\quad A = \{1 + \frac{1}{x} : x \in \mathbb{N},\ x \neq 0\}$

$= \{2,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{4}, \dots\}$

sup = max = 2

inf = 1 , no min

(k) $X = \mathbb{R}$ $\quad A = \{x > 0,\ \log_2(x) \leq 0\}$

$= (0, 1]$

(l) $X = \mathbb{R}$ $\quad A = \{x \in X : \exists y \text{ t.c. } x = 2^{|y|}\}$

$= [1, +\infty)$

(4) (a) $\left(10^{\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}} \cdot 5^{-2} \cdot 10^{\sqrt{2}}$

$= 10^{2-\sqrt{2}} \cdot 5^{-2} \cdot 10^{\sqrt{2}}$

$= 10^2 \cdot 5^{-2} = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 5^{-2} = 2^2 = 4$

(b) $\left(9^{\sqrt{5}}\right)^{2+\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{(2+\sqrt{5})^2}$

$3^{2\cdot(2\sqrt{5}+5)} \cdot 3^{-(4+4\sqrt{5}+5)} = 3$

Polinomi : $a_d x^d + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = p(x)$

Se $a_d \neq 0$ chiamo d grado di $p(x)$, $\deg(p(x))$.

$c \in \mathbb{R}$ è radice se $p(c) = 0$. $(\deg(0) = -\infty)$

Divisione tra polinomi:

Dati $p(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, $g(x) \neq 0$ esistono unici $q(x), r(x)$ t.c.

$$\underbrace{p(x)}_{\text{dividendo}} = \underbrace{q(x)}_{\text{quoziente}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\text{divisore}} + \underbrace{r(x)}_{\text{resto}} \qquad \deg(r(x)) < \deg(g(x))$$

Come si esegue: se $p(x) = a_d x^d + \dots$

$g(x) = b_k x^k + \dots$

se $d < k$ ho $q(x) = 0$, $r(x) = p(x)$

se $d \geq k$ ho $q(x) = \frac{a_d}{b_k} \cdot x^{d-k}$

$$\cancel{a_d x^d} + \dots = \left(\cancel{\frac{a_d}{b_k} x^{d-k}} + \dots\right)\cdot\left(\cancel{b_k x^k} + \dots\right) + \dots$$

e prosegue

Teorema di Ruffini: c è radice di $p(x)$

$\iff p(x)$ è divisibile per $x-c$

Dimo: eseguo divisione $p(x) : (x-c)$

$$p(x) = q(x)\cdot(x-c) + r(x)$$

$$\deg(r(x)) < \deg(x-c) = 1$$
$$\Rightarrow r(x) \in \mathbb{R}$$

$$p(x) = q(x)\cdot(x-c) + R$$

c radice $\Rightarrow p(c) = 0 \Rightarrow 0 = q(x)\cdot(c-c) + R$

$\Rightarrow R = 0$

$R = 0 \Rightarrow p(c) = 0 \Rightarrow c$ radice. $\blacksquare$

Se c è radice di $p(x)$ ho

$p(x) = q_1(x)\cdot(x-c)$; $q_1(c)$

$\nearrow \neq 0$

$\searrow = 0$; $q_1(c) = q_2(c)\cdot(x-c)$

$\Rightarrow p(x) = q_2(c)\cdot(x-c)^2$

$q_2(c)$

$\nearrow \neq 0$

$\searrow = 0$ $q_2(c) = q_3(c)\cdot(x-c)$

$\Rightarrow p(x) = q_3(c)\cdot(x-c)^3$

...

$$\deg(p(x)) > \deg(q_1(x)) > \deg(q_2(x)) > \deg(q_3(x)) > \dots$$

$\Longrightarrow$ mi fermo

$$\Longrightarrow \quad p(x) = (x-c)^m \cdot q_m(x) \qquad q_m(c) \neq 0$$

Def: chiamo tale m la molteplicità di c come radice di $p(x)$.

~~la molteplicità di c è quante volte c è radice~~

Esempio: radici di

$$45x^4 - 177x^3 + 230x^2 - 124x + 24 .$$

Se ci sono radici intere sono

$$\pm \frac{1/2/3/4/6/8/12/24}{1/3/5/9/15/45}$$

$+1$? $\quad 45 - 177 + 230 - 124 + 24 \neq 0$

-1? $\quad 45 + 177 + 230 + 124 + 24 \neq 0$

$2 \quad$

$$\begin{array}{r} 720 \\ 920 \\ 24 \\ \hline 1664 \end{array} \quad - \quad \begin{array}{r} 1416 \\ 248 \\ \hline 1664 \end{array} \quad = 0$$

$x_1 = 2$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 45 & -177 & 230 & -124 & 24 \\ 2 & & 90 & -174 & 112 & -24 \\ \hline & 45 & -87 & 56 & -12 & / \end{array}$$

$$p(x) = (x-2)(45x^3 - 87x^2 + 56x - 12)$$

$$\pm \frac{1 / 2 / 3 / 4 / 6 / 12}{1 / 3 / 5 / 9 / 15 / 45}$$

$2/3$? $\qquad \cancel{45}^{15} \cdot \dfrac{8}{\cancel{27}_{9}} - 87 \cdot \dfrac{4}{9} + 56 \cdot \dfrac{2}{3} - 12$

$$\begin{array}{rr} 120 & -348 \\ 336 & -108 \\ \hline 456 & 456 \end{array}$$

$x_2 = 2/3 \qquad p(x) = (x-2) \cdot (x - 2/3) \cdot \ldots$

$$(x-2)(3x-2) \cdot (15x^2 - 19x + 6)$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 45 & -87 & 56 & -12 \\ 2/3 & & 30 & -38 & 12 \\ \hline & 45 & -57 & 18 & / \end{array}$$

$$x_{3,4} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 360}}{30} = \frac{19 \pm 1}{30} = \begin{cases} 2/3 \\ 3/5 \end{cases}$$

$$p(x) = (x-2)(3x-2)(3x-2)(5x-3)$$
$$= (x-2)(3x-2)^2(5x-3)$$

radici : $\qquad 2, \; 3/5$ con molt $= 1$

$\qquad\qquad 2/3$ con molt $= 2$.

$$15x^2 - 19x + 6 = k \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{5}\right) \quad \Rightarrow k = 15$$

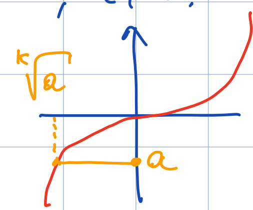
$$\mathbb{C}[z] = \{ a_d z^d + a_{d-1} \cdot z^{d-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 \; : \; d \in \mathbb{N} \;,\; a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C} \}$$

intendendo che $0 \cdot z^k$ si possono mettere o togliere

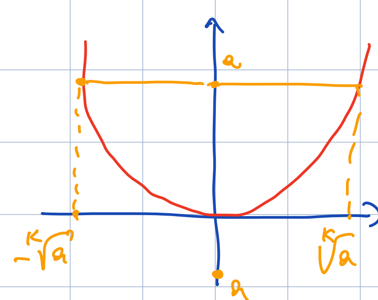
Es: cerchiamo soluzioni $x \in \mathbb{R}$ di

$x^k = a \qquad k \in \mathbb{N},\ k > 0,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$

k dispari $\Rightarrow$ sempre una sola soluzione



k pari:
- $a > 0$ due soluz.
- $a < 0$ nessuna soluz.



Radici k-esime dell'unità in $\mathbb{C}$:

$z \in \mathbb{C}$ t.c. $z^k = 1$

Cerco le soluzioni in forma esponenziale $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ (ρ = modulo di z, ϑ un argomento):

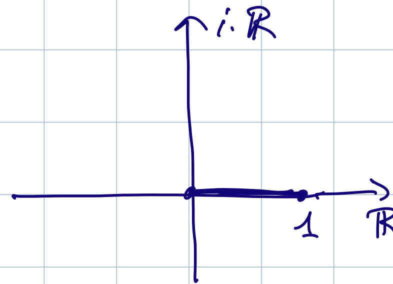
$$\left(\rho \cdot e^{i\vartheta} \right)^k = 1$$

$$\rho^k \cdot \left(e^{i\vartheta}\right)^k = 1$$

$$\rho^k \cdot e^{ik\vartheta} = 1$$

ρ e ϑ danno che $z = \rho e^{i\vartheta}$ è una soluzione di $z^k = 1$ se e solo se $\begin{cases} \rho^k \text{ è } \underline{\underline{\text{il}}} \text{ modulo di } 1 \\ k\vartheta \text{ è } \underline{\underline{\text{un}}} \text{ argomento di } 1 \end{cases}$

cioè $\begin{cases} \rho^k = 1 \\ k\vartheta = 2h\pi \quad h \in \mathbb{Z} \end{cases}$



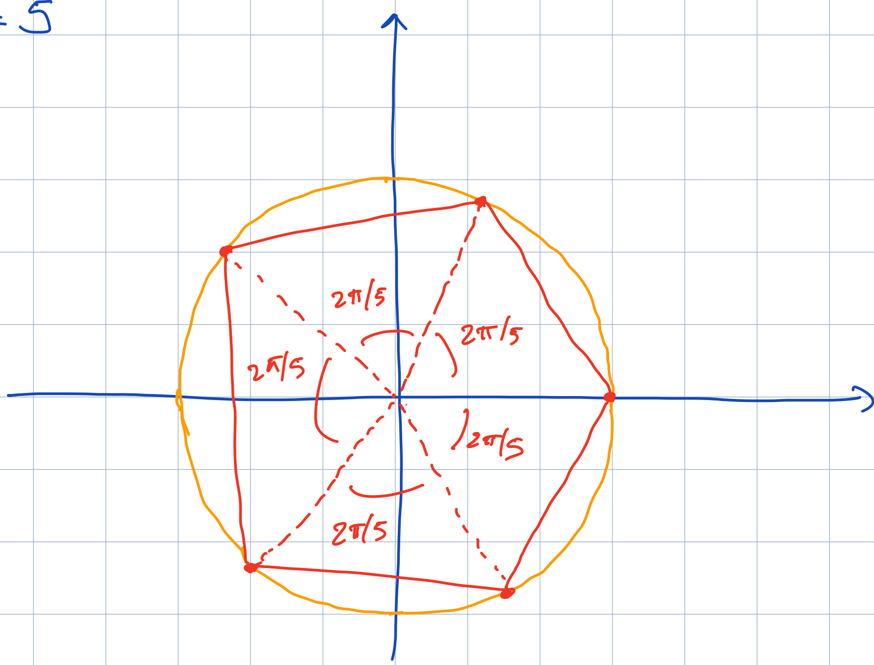
cioè $\begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = \frac{h}{k} \cdot 2\pi \quad h \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Infinite soluzioni?

$h =$	0	1	2	3	$\dots$	$k-1$	k	$k+1$	
$z =$	1	$e^{i2\pi/k}$	$e^{i4\pi/k}$				$e^{i\frac{k}{k}\cdot 2\pi} = e^{i\cdot 2\pi} = 1$	$e^{i2\pi/k}$	$\dots$

No: esattamente k.

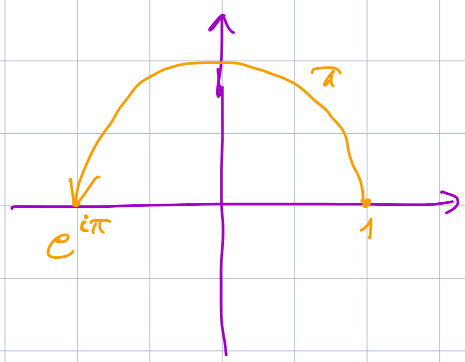
Es: $k=5$



le radici di $z^5=1$ sono i vertici del pentagono regolare inscritto nella circonf. di centro 0 e raggio 1 avente 1 come vertice.

Formula di Eulero:

$$e^{i\cdot\pi} = -1$$



$$\boxed{e^{i\cdot\pi}+1=0}$$