Ist. Mat. I – CIA
5/10/22

$f: X \to Y$ invertibile $\iff$ f bigettiva

$\exists g: Y \to X$ t.c. $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$ — f iniettiva, f surgettiva

$\boxed{\Rightarrow}$ iniettiva: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \underbrace{g(f(x_1))}_{x_1} = \underbrace{g(f(x_2))}_{x_2}$ ✓

surgettiva: $y \in Y \Rightarrow y = f(g(y))$ ✓

$\boxed{\Leftarrow}$ dato $y \in Y$ $\exists x$ t.c. $f(x) = y$ unico; pongo $g(y) = x$.

$f(g(y)) = y$ $\qquad g(f(x)) = x$ $\quad \dots$

$|x+y| \leq |x| + |y|$: anzi vale $=$ se e solo se sono concordi; altrimenti $<$

x, y concordi (compreso uno nullo)
- pos: $x + y = x + y$ ✓
- neg: $-(x+y) = (-x) + (-y)$ ✓

x, y discordi, suppongo $x > 0$, $y < 0$
- $x \geq -y$: $x + y < x + (-y)$ ✓
- $x \leq -y$: $-(x+y) < x + (-y)$ ✓

Se $A \subset \mathbb{R}$ ha max M allora M è anche il $\sup(A) = S$

$M \in A$, $a \leq M$ $\forall a \in A$

$a \leq S$ $\forall a \in A$; se $x < S$ $\exists a \in A$ t.c. $a > x$

Dobbiamo vedere che M soddisfa le proprietà di S:

$a \leq M$ $\forall a \in A$ ✓

se $x < M$; prendo $a = M$ e ho $a > x$.

Foglio 1 - Es. 6

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ non iniettiva $f(1) = f(-1)$

non surgettiva $-1 \notin \mathrm{Im}(f)$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ non iniettiva

surgettiva : $y \geq 0$, $y = f(\sqrt{y})$

(c) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ bigettiva

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 17x - 42$

$f : X \to Y$ bigettiva?

Cerco, dato $y \in Y$, di risolvere $f(x) = y$ equaz. in x

- se esiste sempre soluz, f surgettiva
- se la soluzione o non esiste o è unica, f iniettiva

Qui: $17x - 42 = y$ ha soluz. $x = \frac{1}{17}(y + 42)$

soluz. $\exists$ unica sempre : bigettiva

(e) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 17x - 42$

Dato $y \in \mathbb{R}$ risolvo $17x - 42 = y$ trovando $x = \frac{1}{17}(y+42)$

la soluz. x esiste è unica ma non esiste sempre

$y = -8$ soluz. $x = 2$

$y = 0$ $\nexists x$

iniettiva $\qquad$ non surgettiva

(f) $\{2, 3, 5, 6, 15, 25\} \to \{0, \dots, 6\}$ $\quad f(x) = $ resto $x : 7$

$2 \mapsto 2$

$3 \mapsto 3$

$5 \mapsto 5$ $\qquad$ iniettiva

$6 \mapsto 6$ $\qquad$ non surj. $\quad 0 \notin \mathrm{Im}(f)$

$15 \mapsto 1$

$25 \mapsto 4$

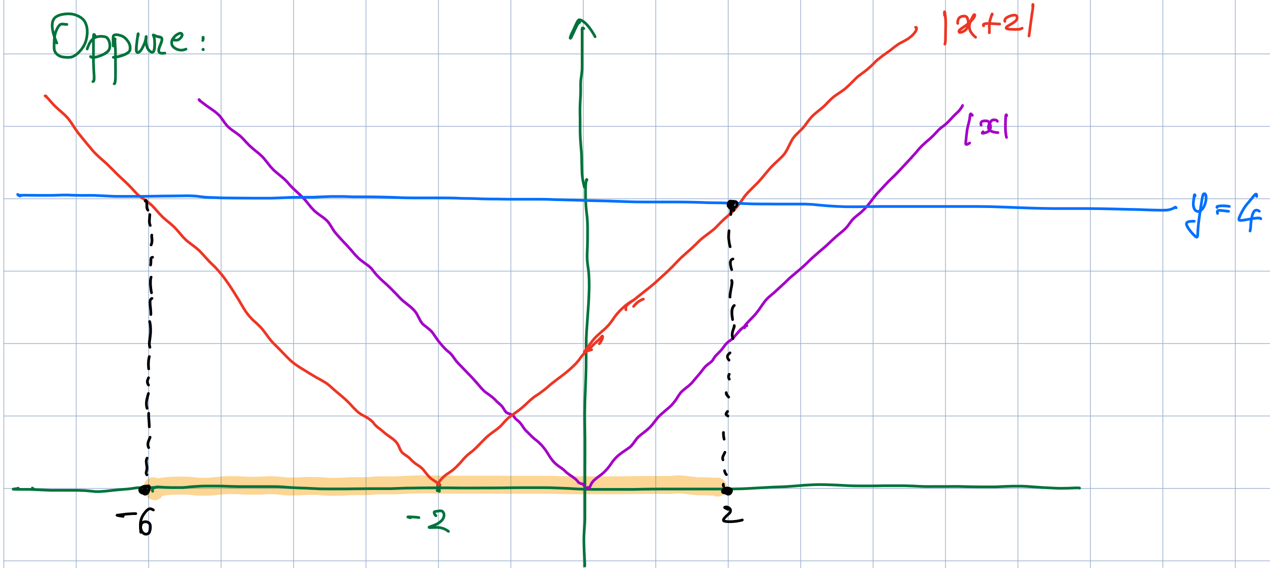
Es 7: (a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{x}{|x|}$

$$\mathrm{Im}(f) = \{+1, -1\}$$

(b) $x \in \mathbb{R}$ $\quad |x+2| \leq 4$ $\qquad -4 \leq x+2 \leq 4$

$$-6 \leq x \leq 2$$

Oppure:

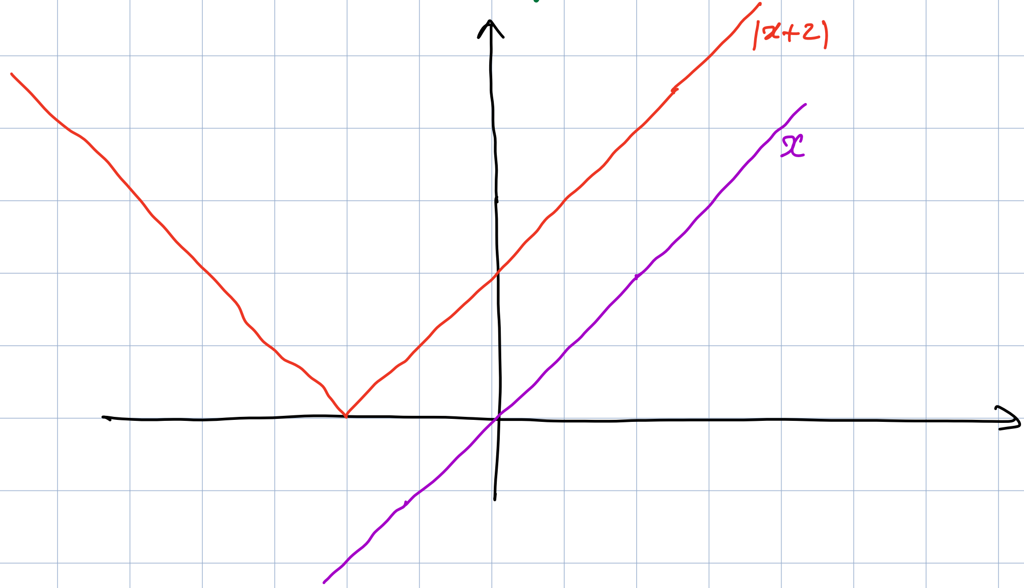


Oss: data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posto $g(x) = f(x+k)$ il grafico di g si ottiene spostando a sinistra di k quello di f (se $k>0$)
a destra di $-k$ (se $k<0$)

(c) $|x+2| \leq x$

Se x è soluz. certamente $x \geq 0$ dunque $x+2 \geq 0$

$\Rightarrow$ $x+2 \leq x$ impossibile



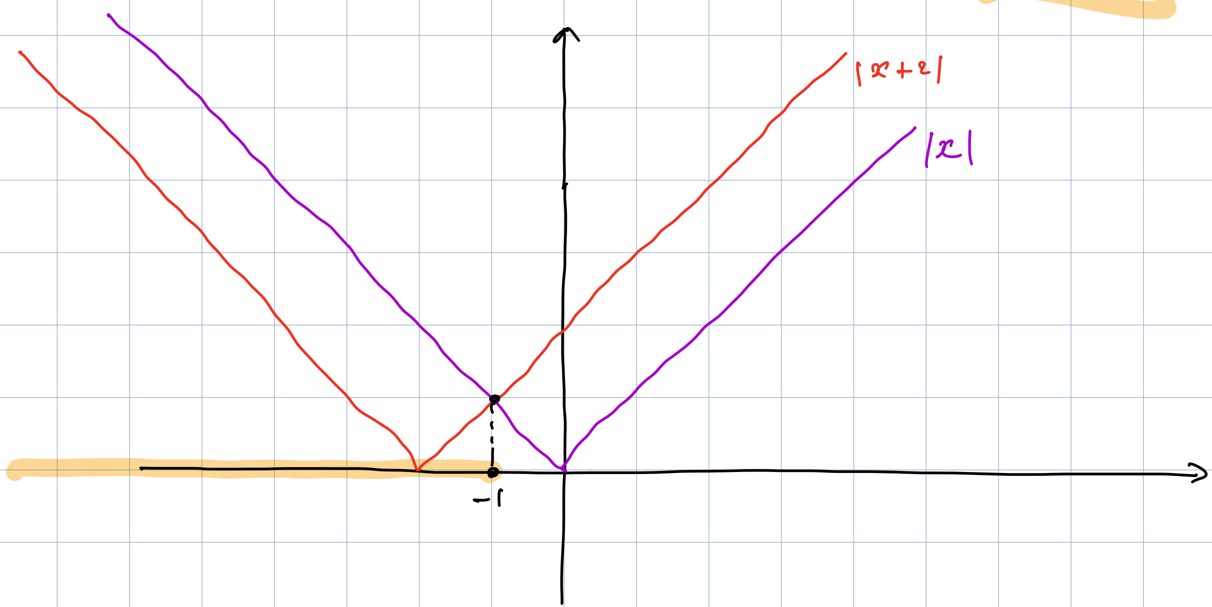
(d) $|x+2| \le |x|$

$\cancel{-x \le x+2 \le x}$

due casi

$x \ge 0$ $\quad -x \le x+2 \le x$ $\quad$ No

$x \le 0$ $\quad x \le x+2 \le -x$ $\quad \boxed{x \le -1}$



<u>Ese 8.</u>

(a) Permut. di $\{2,4,5,7\}$ con $II + III = 9$

I $\quad$ II $\quad$ III $\quad$ IV

$\{2,7\}$

$\{4,5\}$

o viceversa

$2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 8$

(b) Striscia risultati squadra con 10 punti dopo 6 partite.

- 3 vitt. un par. 2 sconf.
- 2 vitt. 4 par

$$\frac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 2!} + \frac{6!}{2!\cdot 4!}$$

V, V, V, P, S, S $\qquad$ $V_1, V_2, V_3, P_1, S_1, S_2 \rightsquigarrow 6!$

$$\frac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 2!}$$

(c) $7\cdot 6\cdot 5$

(d) $6\cdot 6\cdot 5$

(e) $7\cdot 6$

(f) $\binom{13}{3} - \binom{6}{3} - \binom{7}{3}$

tutti i gruppi di 3 persone $\qquad$ gruppi di 3 maschi $\qquad$ gruppi di 3 femmine

(g) mazzo carte $4\times 8 = 32$. Quante coppie?

$$8\cdot\binom{4}{2}$$

Dato $a>0$, $a \neq 1$, $y>0$ chiamo $\log_a(y)$ la soluzione x di $a^x = y$.

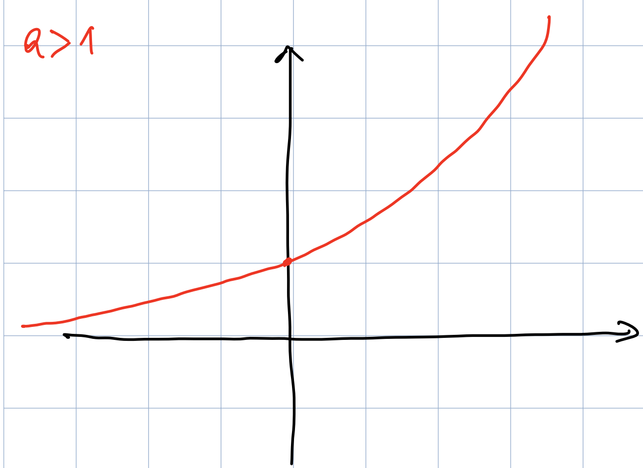
Proprietà:

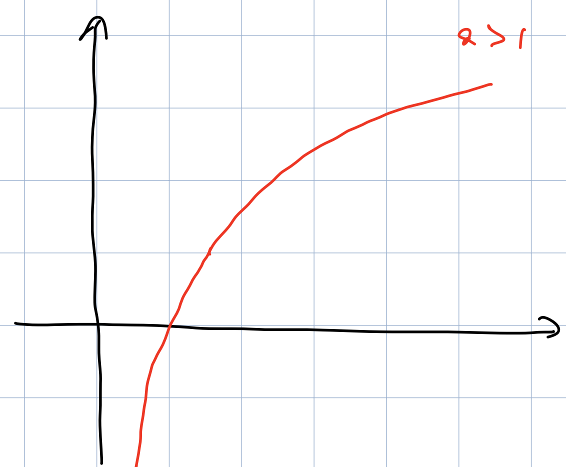
- $a^{\log_a(x)} = x$
- $\log_a(a^x) = x$

Cioè: le funzioni

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} \qquad x \longmapsto a^x$$
$$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \log_a(x)$$

sono l'una inversa dell'altra.





- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$$a^{\log_a(x \cdot y)} = x \cdot y \qquad a^{\log_a(x) + \log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = x \cdot y$$

- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

- $\log_a\left(x^y\right) = y \cdot \log_a(x)$

$$a^{\log_a(x^y)} = x^y \qquad a^{y \cdot \log_a(x)} = \left(a^{\log_a(x)}\right)^y = x^y$$

- $\log_a(x) = \dfrac{1}{\log_x(a)}$ Segue dalla successiva prendendo $b = x$

- $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

$$a^{\log_a(x)} = x$$

$$\log_b\left(a^{\log_a(x)}\right) = \log_b(x)$$

$$\log_a(x) \cdot \log_b(a) = \log_b(x)$$

- $\log_{a^k}(b) = \frac{1}{k}\log_a(b)$

Numeri complessi.

Fatto: l'equazione $x^2+1=0$ non ha soluz. $x \in \mathbb{R}$.

Allora si inventa un oggetto i (oppure j) che $i \notin \mathbb{R}$ con $i^2 = -1$. Unita' immaginaria.

Idea: trattarlo come numero, cioè usarlo nelle operazioni:

$a \in \mathbb{R}$, $a+i$

$b \in \mathbb{R}$, $i \cdot b$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a + i \cdot b$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $\quad (a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$

$$\begin{aligned}(a+i\cdot b)(c+i\cdot d) &= a\cdot(c+i\cdot d) + i\cdot b\cdot(c+i\cdot d)\\ &= a\cdot c + a\cdot i\cdot d + i\cdot b\cdot c + i\cdot b\cdot i\cdot d\\ &= a\cdot c + i^2\cdot b\cdot d + i\cdot(a\cdot d + b\cdot c)\\ &= (a\cdot c - b\cdot d) + i\cdot(a\cdot d + b\cdot c)\end{aligned}$$

Def: si chiama $\mathbb{C} = \{a + i \cdot b \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ insieme dei numeri complessi. Dotato di due operaz. binarie interne

$$+ \ : \ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

$$\cdot \ : \ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

Convenzione: $\underbrace{a + i \cdot 0 = a}_{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$ $\qquad 0 + i \cdot b = i \cdot b$

Teo: con queste operaz. $\mathbb{C}$ è un campo:

(1) $\exists\, 0 \in \mathbb{C}$ t.c. $0 + z = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(5) $\exists\, 1 \in \mathbb{C}$ t.c. $1 \cdot z = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(2) $(z+w)+u = z+(w+u)$ $\qquad$ (6) $(z \cdot w)\cdot u = z \cdot (w \cdot u)$

(3) $z+w = w+z$ $\qquad$ (7) $z \cdot w = w \cdot z$

(4) $\forall z \ \exists (-z)$ t.c. $z+(-z) = 0$ $\qquad$ (8) $\forall z \neq 0 \ \exists\, z^{-1}$ t.c. $z \cdot z^{-1} = 1$

(9) $z \cdot (u+w) = z \cdot u + z \cdot w$

Dimo: tutte facili meno la (8).

Es: (6) $\quad z = a+ib \quad w = c+id \quad u = e+if$

$$(z \cdot w) \cdot u \ \overset{?}{\underset{?}{=}} \ z \cdot (w \cdot u)$$

$$\big((ac-bd)+i(ad+bc)\big)\cdot(e+if) \qquad (a+ib)\cdot\big((ce-df)+i(cf+de)\big)$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\big((ac-bd)\cdot e-(ad+bc)f\big) \qquad a\cdot(ce-df)-b(cf+de)$$
$$+i\big((ac-bd)\cdot f+(ad+bc)\cdot e\big) \qquad +i\big(a\cdot(cf+de)+b(ce-df)\big)$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$(ace-bde-adf-bcf) \qquad (ace-adf-bcf-bde)$$
$$+i(acf-bdf+ade+bce) \qquad +i(acf+ade+bce-bdf)$$

(8) Dato $z=a+ib\neq 0$ cerco $x+iy$ che sia z^{-1}, cioè $z\cdot z^{-1}=1$.

$a+i\cdot b\neq 0$ significa $a+i\cdot b\neq 0+i\cdot 0$ cioè $a\neq 0$ o $b\neq 0$ cioè non entrambi nulli.

Vogliamo: $(a+ib)(x+iy)=1$

$(ax-by)+i(bx+ay)=1=1+i\cdot 0$

$$\begin{cases} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$$

sistema di 2 equaz. nelle incognite x,y dati parametri $a,b\in\mathbb{R}$ non entrambi nulli.

Se soluz. c'è è:

$a\cdot \mathrm{I}+b\cdot\mathrm{II} \longrightarrow x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$

$-b\cdot\mathrm{I}+a\cdot\mathrm{II} \longrightarrow y=-\dfrac{b}{a^2+b^2}$

e lì va bene $a^2+b^2>0$. ▨

Dato $z = a+ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ si ha

$$z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

Def: dato $z = a+ib \in \mathbb{C}$ chiamo

$\bar{z} = a-ib$ coniugato di z

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ modulo di z

Dunque: $z \neq 0 \Longrightarrow z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Esercizio:
- $|a|$ per $a \in \mathbb{R}$ è val. ass.
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.