UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 13/9/22 — Quesiti

Nome __________ **Cognome** __________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Sapendo che la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -12 & -4 \\ 3 & -7 & -3 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ ha l'autovalore $\lambda_1 = 1$, trovare gli altri.

2. Esibire la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su Span $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

3. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[t-3 : 1-2t : t+3]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ appartiene alla retta passante per $[4 : -5 : 2]$ e $[1 : 2 : -3]$.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica $(t-1)x^2 + 2(1-2t)xy + 9y^2 + 2x = 9$ è un'iperbole.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $5x^2 + 8xz - 14x + y^2 + 2yz + 6z^2 - 10z + 12 = 0$.

6. Esibire oppure provare che non esistono due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^7(\mathbb{R})$ entrambi aventi dimensione 4 e che si incontrano esattamente in un punto.

7. Posto $R = [0,1] \times [-1,1]$ calcolare $\int_{\partial R} \left(2y - \ln\left(\frac{1-\sin(x)}{2+\cos(x)}\right)\right)\, \mathrm{d}x$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Modulo di "Geometria" — Scritto del 13/9/22 — Esercizî

1. Al variare del parametro **reale** t, considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 - i & \sqrt{2}(2t - 1 + 2i) \\ \sqrt{2}(t - 3i) & 11 - i \end{pmatrix}.$$

(A) (6 punti) Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di A, verificando che ciò è vero in particolare per $t = 2$.

(B) (6 punti) Per $t = 2$ trovare gli autovalori di A e una tale base.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s^3 + 3s \\ 2s^3 - s^2 \\ s + s^2 - s^3 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (4 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $\alpha(0)$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $\alpha(0)$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta x \, \mathrm{d}y$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Risposte ai quesiti

3. ♢

1. $\lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2$

2. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

3. $t = 5$

4. t non compreso tra $\frac{5}{4}$ e 2 e diverso da 1 e $\frac{9}{4}$

5. Insieme vuoto

6. Non esistono: se fossero le proiezioni in $\mathbb{P}^7(\mathbb{R})$ di $U \setminus \{0\}$ e $W \setminus \{0\}$, con U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$ di dimensione 5, allora $U \cap W$ avrebbe dimensione 1, invece ha dimensione almeno 2

7. -4

Soluzioni degli eserciziî

3. $\diamondsuit$

1.

(A) $t = -\frac{2}{3},\ t = 2$

(B) $\lambda_1 = 6,\ v_1 = \frac{1}{2\sqrt{13}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(3+2i) \\ i-5 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 16 - 2i,\ v_2 = \frac{1}{2\sqrt{13}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(3+2i) \\ 5-i \end{pmatrix},$

2.

(A) La prima componente di α ha derivata sempre positiva

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ n = \frac{1}{\sqrt{190}} \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix},\ b = \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{\sqrt{19}}{5\sqrt{10}},\ \tau = -\frac{6}{19}$

(D) $\frac{31}{10}$