UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 28/6/22 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Determinare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

2. Data $M \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ tale che il suo polinomio caratteristico $p_M(z)$ ha esattamente 3 radici, si può concludere che M è diagonalizzabile oppure che non lo è? Giustificare la risposta.

3. In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard, trovare il punto del piano generato dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ più vicino al punto $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $(1+4t)x^2 + 6txy + 4y^2 + 4x - 24y = 0$ è una parabola.

5. Se due parabole in $\mathbb{R}^2$ hanno lo stesso punto all'infinito, quanti punti in comune possono avere al finito?

6. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che

$$ {}^{\mathrm{t}}M \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -\sqrt{6} \\ -3 & 0 & 1 \\ \sqrt{6} & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

7. Calcolare $\int_\alpha ((x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è la curva data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t+t^2 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 28/6/22 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $\begin{pmatrix} 2k+3 & -k-2 & 0 \\ k-4 & 5 & 4-k \\ -k^2+k+12 & k^2-k-12 & k^2+k-9 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che $\det(M) = 2k^4 + 5k^3 - 7k^2 - 25k - 15$.

(B) (3 punti) Sapendo che M ha sempre l'autovalore $2k+3$ trovare gli altri.

(C) (3 punti) Per ogni t determinare la molteplicità algebrica degli autovalori di M.

(D) (3 punti) Per ogni t determinare la molteplicità geometrica degli autovalori di M, stabilendo se M sia o meno diagonalizzabile.

2. Considerare la curva parametrizzata α in $\mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} \sin(3s) \\ s^2 - 2s \\ \ln(1+s) \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Determinare il più grande intervallo I su cui α può essere definita e provare che su I essa è regolare e semplice.

(B) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $\alpha(0)$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $\alpha(0)$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta y \, \mathrm{d}z$ dove β è la restrizione di α a $[0,1]$.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Risposte ai quesiti

3. ♢

1. $\lambda_1 = 4,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = -3,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

2. Non si può concludere né una cosa né l'altra: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ è diagonal(izzabil)e, mentre $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ non lo è

3. $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. $t = 2$

5. Zero, uno o due. A meno di trasformazioni affini possiamo supporre che il punto all'infinito sia $[0 : 1]$ e la prima parabola sia $y = x^2$. Allora la seconda è $y = ax^2+bx+c$ e l'equazione $x^2 = ax^2+bx+c$ ha al più due soluzioni. I casi zero, uno e due si realizzano con $y = x^2 + 1$, $y = 2x^2$ e $y = 2x^2 - 1$

6. $k = \pm 4$

7. -5

Soluzioni degli esercizî

3. ♢

1.

(A) Sostituendo la prima colonna con sé stessa più la seconda, poi la seconda riga con sé stessa meno la prima, infine la terza colonna con sé stessa meno la prima, si ottiene direttamente che $\det(M) = (k+1)\cdot(k^2-5)\cdot(2k+3) = 2k^4+5k^3-7k^2-25k-15$.

(B) $k+1$ e k^2-5

(C) Per $k=-2$ autovalore -1 con molteplicità algebrica 3; per $k=3$ autovalore 4 con molteplicità algebrica 2 e autovalore 9 con molteplicità algebrica 1; per $k=4$ autovalore 11 con molteplicità algebrica 2 e autovalore 5 con molteplicità algebrica 1; altrimenti autovalori $2k+3$, $k+1$ e k^2-5 con molteplicità algebrica 1

(D) Per $k=-2$ autovalore -1 con molteplicità geometrica 2: non diagonalizzabile; per $k=3$ autovalore 4 con molteplicità geometrica 1 e autovalore 9 con molteplicità geometrica 1: non diagonalizzabile; per $k=4$ autovalore 11 con molteplicità geometrica 2 e autovalore 5 con molteplicità geometrica 1: diagonalizzabile; altrimenti autovalori $2k+3$, $k+1$ e k^2-5 con molteplicità geometrica 1: diagonalizzabile

2.

(A) $I=(-1,+\infty)$; la componente z di α ha derivata positiva

(B) $t=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$; $n=\frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}5\\6\\-3\end{pmatrix}$; $b=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

(C) $\kappa=\frac{3\sqrt{5}}{14\sqrt{14}}$; $\tau=\frac{4}{15}$

(D) $-\frac{5}{2}+3\ln(2)$