UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 31/1/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 3k+4 & k^2-3k-4 \\ k+1 & k^2-k-1 \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.

2. In $\mathbb{R}^4$ trovare il punto del piano $\mathrm{Span}(e_1+2e_2-3e_4,\ 3e_1-2e_3+e_4)$ più vicino al punto $e_1+e_2+e_3$.

3. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per i punti $[t-1:-2:4]$ e $[1:t+1:-2]$ contiene il punto $[7:1:6]$.

4. Determinare il tipo affine della quadrica $3y^2-3z^2-6xy+2xz+8yz-8y+6z-3=0$.

5. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste una matrice $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che

$$M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{5} \\ 1 & -\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Per la funzione $f(x,y) = \mathrm{e}^{4x+5y} + \cos(2x-3y)$ determinare la matrice hessiana nel punto $(0,0)$ e i segni dei suoi autovalori.

7. Calcolare $\int_\alpha x \cdot y^2 \cdot \mathrm{e}^{x^2 \cdot y^3} \cdot (2y \cdot \mathrm{d}x + 3x \cdot \mathrm{d}y)$ dove $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ è la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi \cdot t) \\ t^3 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Modulo di "Geometria" — Scritto del 31/1/23 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & k^2 & -3 \\ k+2 & 0 & k^2-2 \\ -3 & k & 2k \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Determinare i due valori di k per i quali esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

(B) (6 punti) Per il minimo di tali valori di k esibire una tale base indicando i relativi autovalori.

(C) (3 punti) Per l'altro di tali valori di k provare che -3 è un autovalore di A ed esibire un relativo autovettore.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s + \cos(s) \\ s - s^2 + s^3 \\ \mathrm{e}^s \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che α è regolare e semplice.

(B) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $\alpha(0)$.

(C) (4 punti) Determinare la curvatura e la torsione nel punto $\alpha(0)$.

(D) (4 punti) Calcolare $\int_\beta \frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}y}{1+z-y}$ dove β è la restrizione di α a $[0,1]$.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 31/1/23 — Quesiti

Risposte ai quesiti

3. $\diamondsuit$

1. $k \neq 3$

2. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

3. $t = \frac{1}{3}$ e $t = 4$

4. Paraboloide iperbolico

5. $k = \pm 3$

6. $\begin{pmatrix} 12 & 26 \\ 26 & 16 \end{pmatrix}$; discordi

7. $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}$

Soluzioni degli esercizî

3. ♢

1.

(A) $k = -1$ e $k = 2$

(B) $\lambda_1 = 0,\ v_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \lambda_2 = -3,\ v_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix};\quad \lambda_3 = 9,\ v_3 = \frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(C) $A + 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ ha determinante 0; autovettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.

(A) La seconda componente di α ha derivata sempre positiva.

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ n = \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix};\ b = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{1}{9}\sqrt{42};\ \tau = -\frac{13}{14}$

(D) $1 - \log(2)$