Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 25/1/22 — Quesiti

Quesito 1. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} t+3 & t-2 & t+1 \\ 0 & t^2+1 & t-1 \\ 0 & 0 & 3t-1 \end{pmatrix}$$

risulta diagonalizzabile.

Quesito 2. In $\mathbb{R}^3$ con la distanza associata al prodotto scalare standard, determinare il punto del piano generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

più vicino al punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Quesito 3. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard ortonormalizzare la base

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quesito 4. Descrivere le matrici $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ per le quali esiste una base ortonormale (v_1, v_2) di $\mathbb{C}^2$ tale che

$$A \cdot v_1 = i \cdot k_1 \cdot v_1 \qquad\qquad A \cdot v_2 = i \cdot k_2 \cdot v_2$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Quesito 5. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica di equazione

$$(2-t)x^2 + 2(t-4)xy + 9y^2 + 2x - 6y = 0$$

è una parabola.

Quesito 6. Esibire la matrice $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che $\det(A) = -1$ e

$$A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Quesito 7. Determinare il tipo proiettivo della quadrica in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - w^2 + 6xy - 2xz - 4yw + 2zw = 0.$$

Quesito 8. Esibire oppure provare che non esistono due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ entrambi di dimensione 3 e che si incontrano esattamente in un punto.

Quesito 9. Calcolare la curvatura nel punto $t = 0$ della curva orientata $\alpha : \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right) \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \ln(1 + 3t) \\ t^2 - \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Quesito 10. Calcolare

$$\int_{\partial R} \left((\ln(2+\sin(x)) + 2y)\ \mathrm{d}x + (x - \cos(2+\ln(1+y)))\ \mathrm{d}y \right)$$

dove $R = [0,2] \times [0,1]$.

Risposte ai quesiti

1. $t \neq 2$ e $t \neq -1$

2. $\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -1 \\ 43 \\ 10 \end{pmatrix}$

3. $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3\sqrt{70}}\begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ -19 \end{pmatrix}$, $-\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

4. Le antihermitiane

5. $t = -2$

6. $A = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} -119 & 120 \\ 120 & 119 \end{pmatrix}$

7. Iperboloide proiettivo (equazione canonica $x^2 + y^2 = z^2 + w^2$)

8. Non esistono: due sottospazi proiettivi X_1 e X_2 di $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ aventi dimensione 3 sono la proiezione di $W \setminus \{0\}$ e $Z \setminus \{0\}$ con W e Z sottospazi di dimensione 4 di $\mathbb{R}^6$. Per la formula di Grassmann $W \cap Z$ ha dimensione almeno $4 + 4 - 6 = 2$, dunque $X_1 \cap X_2$, che è la proiezione di $W \cap Z \setminus \{0\}$ ha dimensione almeno 1, dunque contiene infiniti punti.

9. $-\frac{3}{100}\sqrt{10}$

10. -2