Quesito 1. Posto

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

considerare l'applicazione lineare $f : X \to X$ data da

$$f(x) = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 37 & -4 & -29 \\ -29 & -18 & 31 \\ -1 & 29 & 5 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Determinare il polinomio caratteristico di f, i suoi autovalori e una base che la diagonalizza.

Quesito 2. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ 1-t^2 & t^2+t+1 \end{pmatrix}$$

risulta diagonalizzabile.

Quesito 3. In $\mathbb{R}^2$ considerare il prodotto scalare e la norma associati alla matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare tutti i vettori ortogonali a $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ rispetto a tale prodotto scalare e unitari rispetto a tale norma.

Quesito 4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare su $\mathbb{R}^2$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} t+4 & t^2+1 \\ t+7 & 13 \end{pmatrix}$$

risulta un prodotto scalare.

Quesito 5. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste una matrice $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che

$$M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{5} \\ 1 & -\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quesito 6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per i punti $[t-1 : -2 : 4]$ e $[1 : t+1 : -2]$ contiene il punto $[7 : 1 : 6]$.

Quesito 7. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione

$$3y^2 - 3z^2 - 6xy + 2xz + 8yz - 8y + 6z - 3 = 0.$$

Quesito 8. Determinare la matrice hessiana nel punto $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{4x+5y} + \cos(2x-3y)$$

e i segni dei suoi autovalori.

Quesito 9. Determinare il riferimento di Frénet, la curvatura e la torsione nel punto $s = 0$ della curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} s + \cos(s) \\ s - s^2 + s^3 \\ \mathrm{e}^s \end{pmatrix}.$$

Quesito 10. Calcolare

$$\int_{\alpha} x \cdot y^2 \cdot \mathrm{e}^{x^2 \cdot y^3} \cdot (2y \cdot \, \mathrm{d}x + 3x \cdot \, \mathrm{d}y)$$

dove $\alpha : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ è la curva data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi \cdot t) \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Risposte ai quesiti

1. $p_f(t) = t^2 - t - 6$; $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$; $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. $t \neq 2$

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{61}}\begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}$

4. $t = -2$

5. $k = \pm 3$

6. $t = \frac{1}{3}$ e $t = 4$

7. Paraboloide iperbolico

8. $\begin{pmatrix} 12 & 26 \\ 26 & 16 \end{pmatrix}$; discordi

9. $t = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $n = \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $b = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\kappa = \frac{1}{9}\sqrt{42}$; $\tau = -\frac{13}{14}$

10. $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}$