Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 14/9/21 — Quesiti

Quesito 1. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 2t^2 - 2t - 1 & 2t - 3 \\ 2t^2 - 3t & 3t - 4 \end{pmatrix}$$

risulta diagonalizzabile.

Quesito 2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard determinare il punto del piano generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

più vicino al punto

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Quesito 3. Nello spazio $\mathbb{R}^2$ determinare tutti i vettori ortogonali al vettore

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

rispetto al prodotto scalare associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e unitari rispetto alla norma indotta da tale prodotto scalare.

Quesito 4. Determinare gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix}$$

e una base ortogonale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

Quesito 5. Determinare le matrici di tutte le isometrie dello spazio $\mathbb{R}^2$ (dotato del prodotto scalare standard) che trasformano il vettore

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nel suo opposto.

Quesito 6. Nel piano cartesiano considerare al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ la conica di equazione

$$(t+6)x^2 + 2txy + y^2 + 2x - y = 0.$$

Stabilire per quali t essa sia degenere e determinarne il tipo affine per gli altri valori di t.

Quesito 7. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione

$$4y^2 + 2xy - xz + 2yz - 3x - z = 0.$$

Quesito 8. Esibire, oppure provare che non esistono, due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ tra loro disgiunti ed entrambi aventi dimensione 2.

Quesito 9. Per la curva $\alpha : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 + \ln(t) \\ t^2 \end{pmatrix}$$

calcolare

$$\int_\alpha y^2.$$

Quesito 10. Per la curva $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi \cdot t^3) \\ \pi \cdot t^4 \end{pmatrix}$$

calcolare

$$\int_\alpha x \cdot \sin(x^2 \cdot y) \cdot (2y \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y) \, .$$

Risposte ai quesiti

1. $t \neq -1$

2. $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 59 \\ -40 \\ 37 \end{pmatrix}$

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

4. $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 7;\ v_1 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

6. Degenere (due rette parallele) per $t = -2$, parabola per $t = 3$, iperbole per $t < -2$ e $t > 3$, ellisse per $-2 < t < 3$

7. Iperboloide ellittico (a due falde)

8. $\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5] \in \mathbb{P}^5(\mathbb{R}) :\ x_0 = x_1 = x_2 = 0\}$,
$\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5] \in \mathbb{P}^5(\mathbb{R}) :\ x_3 = x_4 = x_5 = 0\}$

9. $\frac{5\sqrt{5}}{24} \cdot \left(13\sqrt{13} - 1\right)$

10. 2