UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 18/2/20 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{C})$ con $p_A(z) = (z - 7i) \cdot (z + 1 - 2i) \cdot (z - 4 + 3i)$ si può concludere che A è diagonalizzabile oppure che non lo è? Spiegare.

2. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

3. Nello spazio $\mathbb{R}^2$ considerare il prodotto scalare associato alla matrice $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Determinare i vettori ortogonali a $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e unitari rispetto a tale prodotto scalare.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 7 & t+5 & 0 \\ t^2+3 & -4t+3 & t^2+1 \\ 0 & 3t-1 & t^2-4 \end{pmatrix}$.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $-3x^2 + 3z^2 - 6xy - 6yz - 4y + 2z = 0$.

6. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ esibire due sottospazi proiettivi di dimensione 2 che si incontrino in un solo punto.

7. Dire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la forma $xy \cdot \mathrm{e}^{5x^3y^2 - 4x^2y^3} \cdot (y(15x + \alpha y)\, \mathrm{d}x + x(\beta x - 12y)\, \mathrm{d}y)$ sia esatta.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Considerare in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio X di equazione $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$ e al variare di $t \in \mathbb{R}$ la matrice
$$M_t = \begin{pmatrix} t^2-1 & -t^2 & 2t^2+2 \\ 4t^2+5t & -4t^2-5t-1 & 8t^2+15t+8 \\ t(t+2) & -t^2-2t & 2t^2+6t+1 \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Esibire la matrice della proiezione ortogonale su X.

(B) (3 punti) Provare che la formula $f(x) = M_t \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f : X \to X$.

(C) (6 punti) Discutere la diagonalizzabilità di f al variare di t.

2. Considerare la curva $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) - \sin(2t) \\ 5\sin(t) + \sin(2t) \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è chiusa e regolare.

(B) (5 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $\alpha(\pi)$.

(C) (5 punti) Calcolare $\int_\alpha \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. Si può concludere che è diagonalizzabile perché ha 3 autovalori distinti

2. $\lambda_1 = 8,\ v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = -5,\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $\pm\frac{1}{2\sqrt{33}}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

4. $t = 2$

5. Paraboloide iperbolico

6. Le proiezioni in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ dei sottospazi $\mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$ e $\mathrm{Span}(e_1, e_4, e_5)$ di $\mathbb{R}^5$

7. $\alpha = -8,\ \beta = 10$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♢

1.

(A) $\frac{1}{38}\begin{pmatrix} 29 & 6 & -15 \\ 6 & 34 & 10 \\ -15 & 10 & 13 \end{pmatrix}$

(B) Posto $\omega = (3, -2, 5)$ si ha $\omega \cdot M_t = -\omega$

(C) Rispetto alla base $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ la f ha matrice $\begin{pmatrix} -t^2 - t - 1 & t+2 \\ -t^2 - 2t & 2t+1 \end{pmatrix}$ che ha traccia $-t^2 + t$ e determinante $-t^3 + t^2 + t - 1$, dunque ha autovalori $1 - t^2$ e $t - 1$. Essi sono distinti per $t \neq -2$ e per $t \neq 1$. Inoltre la matrice è diagonale per $t = -2$ e non lo è per $t = 1$. Dunque f è diagonalizzabile per $t \neq 1$.

2.

(A) $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; scrivendo $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -2(1 - 2\sin^2(t)) - 3\sin(t) \\ 2(2\cos^2(t) - 1) + 5\cos(t) \end{pmatrix}$ e imponendo $\alpha'(t) = 0$ si trovano valori per $\sin(t)$ e $\cos(t)$ i cui quadrati non hanno somma 1

(B) $\frac{9}{13\sqrt{13}}$

(C) 2π