UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 13/9/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 3 & t+2 \\ 4-t^2 & 5-t-t^2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitari e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Se $X \subset \mathbb{P}^7(\mathbb{R})$ è un sottospazio proiettivo di dimensione 4, qual è la massima dimensione possibile per un altro sottospazio proiettivo Y tale che $X \cap Y$ sia un solo punto?

4. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $tx^2 + 2(t-3)xy - 16y^2 - 2tx + 8y = 0$ è una parabola.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $5x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 4xz + 2x - 2y - 2z = 0$.

6. Calcolare la matrice hessiana nell'origine per la funzione $f(x, y) = (3x - 2y) \cdot \mathrm{e}^{4x-5y}$ e i segni dei suoi autovalori.

7. Per quali $r > 0$ esistono sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < 1, \ x^2 + y^2 > r^2\}$ forme chiuse non esatte?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 13/9/19 — Esercizî

1. Considerare la matrice $M = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che M è ortogonale.

(B) (3 punti) Provare che M ha traccia e determinante -1.

(C) (3 punti) Dedurre dai punti precedenti che M rappresenta la rotazione di angolo $\pm\frac{\pi}{2}$ intorno a una retta ℓ composta con la riflessione rispetto a $\ell^{\perp}$.

(D) (3 punti) Determinare la retta ℓ del punto precedente.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s - e^{2s} \\ s^3 - s^2 + 3s \\ 2s + \cos(s) \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è regolare e semplice.

(B) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $s = 0$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. $t \neq 3$

2. $\pm\frac{1}{3\sqrt{70}}\begin{pmatrix} -10 \\ 13 \\ 19 \end{pmatrix}$

3. 3

4. $t = -9$

5. Ellissoide

6. $\begin{pmatrix} 24 & -23 \\ -23 & 20 \end{pmatrix}$; discordi

7. $r < 1$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. ♢

1.

(A) Le identità

$$1 + \left(1-\sqrt{3}\right)^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 9$$

$$\left(1+\sqrt{3}\right) + \left(1-\sqrt{3}\right) + \left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right) = 0$$

comportano facilmente che $M \cdot {}^{\mathrm{t}}M = \mathrm{I}_3$

(B) Calcoli

(C) Essendo ortogonale la M è coniugata a una matrice della forma $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$; poiché $\det(M) = -1$ il segno al posto $(1,1)$ è $-$; poiché $\mathrm{tr}(M) = -1$ si ha $\cos(\vartheta) = 0$

(D) $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.

(A) La terza componente di α ha derivata positiva

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $n = -\frac{1}{\sqrt{973}}\begin{pmatrix} 30 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{278}}\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{1}{98}\sqrt{973}$, $\tau = -\frac{31}{139}$

(D) $\mathrm{e}^2 - 1$