UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 16/7/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ⌴⌴⌴⌴⌴⌴

1. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $A = \begin{pmatrix} -9 & 19 & 1 \\ 0 & 17 & 6 \\ 16 & -29 & 0 \end{pmatrix}$ considerare $f : X \to X$ data da $f(x) = A \cdot x$; trovare gli autovalori di f e una base che la diagonalizza.

2. Trovare gli autovalori di $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = 2$ e $p_A(6) = -96$.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitari, con prima componente reale, e ortogonali a $\begin{pmatrix} 1+2i \\ 3-i \end{pmatrix}$.

4. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 7 & t^2+1 & t^4 \\ -3t-1 & 1+5t & 3 \\ t^3-9t+6 & 3 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

5. Determinare il tipo proiettivo della quadrica di equazione
$-y^2 + w^2 + 2xy - 4xz + 6yz + 2yw = 0$. Spiegare.

6. Determinare i punti all'infinito del luogo in $\mathbb{R}^2$ di equazione
$6x^3 - 5x^2y - 21xy^2 - 10y^3 + 4x^2 - 3xy + y^2 + 7x - 8y + \sqrt{3} = 0$.

7. Dire per quali $k, h \in \mathbb{R}$ è esatta la forma $xy^2(12x + ky)\,\mathrm{d}x + x^2y(hx - 15y)\,\mathrm{d}y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e in $\mathbb{R}^3$ il piano V di equazione $x + 3y - 2z = 0$.

(A) (3 punti) Provare che M è diagonalizzabile ed ha un autovalore razionale, determinando un autovettore rispetto ad esso.

(B) (3 punti) Provare che la matrice A che rappresenta la riflessione di $\mathbb{R}^3$ rispetto a un qualsiasi piano W è sempre ortogonale e simmetrica.

(C) (3 punti) Trovare la matrice N che rappresenta la riflessione di $\mathbb{R}^3$ rispetto a V.

(D) (3 punti) Provare che $M + N$ non è invertibile. [Suggerimento: **non** esplicitare $M + N$.]

2. Considerare la curva $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2t - \ln(1+t) \\ \ln(1+t) - 3t \end{pmatrix}$ e la restrizione β di α a $[0, 1]$.

(A) (2 punti) Provare che α è regolare.

(B) (3 punti) Calcolare la curvatura di α in $t = 0$.

(C) (3 punti) Determinare il segno della curvatura di α in ogni t.

(D) (4 punti) Calcolare $\int_\beta (13(x+y)^2 - 21(x+y) + 8)$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1;\ v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. 12 e -10

3. $\pm\frac{1}{5\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 10 \\ 7i-1 \end{pmatrix}$

4. $t = -2$

5. $d_2 < 0,\ d_3 < 0, < d_4 < 0$; autovalori $-,+,+,+$; ellissoide proiettivo

6. $[1:-1],\ [5:2],\ [2:-3]$

7. $k = -10,\ h = 8$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) È simmetrica; $\lambda = -1$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(B) Se P e Q sono le matrici delle proiezioni ortogonali su W e su $W^\perp$, si ha $A = P - Q$, ma P e Q sono simmetriche. Inoltre A rappresenta una isometria, dunque è ortogonale; oppure basta calcolare

$$A \cdot {}^{\mathrm{t}}\!A = (P - Q) \cdot (P - Q) = P \cdot P - P \cdot Q - Q \cdot P + Q \cdot Q = P - 0 - 0 + Q = \mathrm{I}_3$$

(C) $N = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

(D) $v \in V$ dunque $N \cdot v = v$, da cui $(M + N) \cdot v = -v + v = 0$

2.

(A) La prima componente di α' si annulla solo in $t = -\frac{1}{2}$ e la seconda solo in $t = -\frac{2}{3}$

(B) $\frac{1}{5\sqrt{5}}$

(C) Sempre positiva poiché $\det(\alpha'(t), \alpha''(t)) = \frac{1}{(1+t)^2}$

(D) $\frac{1}{3}\left(34^{3/2} - 5^{3/2}\right)$