Lezione 29-05-19

ω è una 1-forma su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto.

Def: ω è esatta se $\exists\, U : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $dU = \omega$

ω chiusa se $d\omega = 0$

$\omega = g \cdot dx + h \cdot dy \quad d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) \cdot dx\,dy \quad d\omega = 0$ se $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$

Prop: ω è esatta $\Rightarrow$ ω è chiusa

Fatto: ω chiusa $\not\Rightarrow$ ω esatta

Esempio di forma chiusa non esatta è

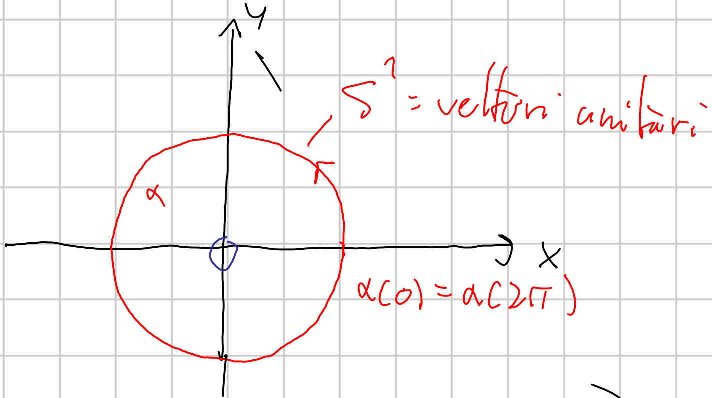
$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\quad \omega(x,y) = \dfrac{-y \cdot dx + x \cdot dy}{x^2+y^2}$.

(Scorsa lezione) $d\omega = 0 \Rightarrow \omega$ è chiusa.

Mostriamo che ω non è esatta $\to$ cerchiamo α curva semplice chiusa a valori in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tale che $\int_\alpha \omega \neq 0$. (Per caratterizzaz. delle forme esatte).

Consideriamo $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ data da

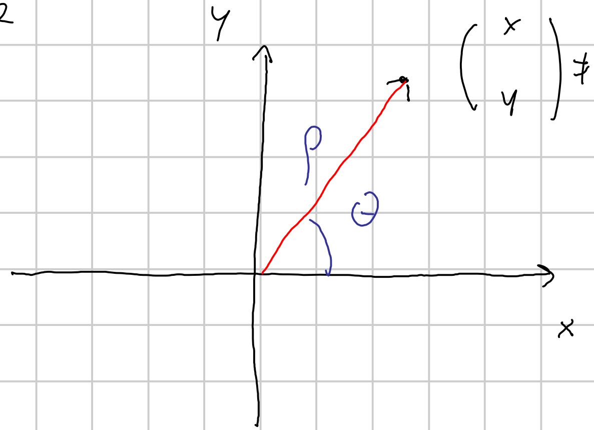
$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$



$$\int_\alpha \omega = \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin(t))(-\sin(t)) + \cos(t)\cdot\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \cdot dt = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi \neq 0$$

$\neq 0 \Rightarrow \omega$ non è esatta.

$\mathbb{R}^2$

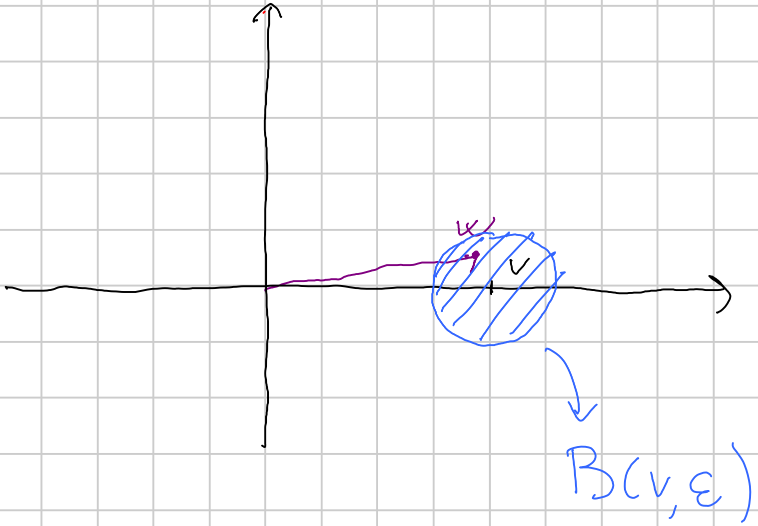


$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x = \rho \cdot \cos \theta \\ y = \rho \cdot \sin \theta \end{cases}$

ρ = modulo di $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

θ angolo tra l'asse x e il segmento per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

θ non è definito in modo unico (posso sommare $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e definisco lo stesso angolo)



$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dichiaro (arbitrariamente) che Θ vale 0 in $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v$

(Potevo prendere qualsiasi valore del tipo $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)

$\Theta(v) = \Theta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$. Allora è ben definito l'argomento Θ per tutti i punti di $B(v, \varepsilon)$. Definiamo ...

In generale Θ è definita su $B(v,\varepsilon)$ in modo ambiguo, ma diverse scelte si ottengono l'una dall'altra sommando per una costante ($2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) quindi il differenziale di Θ è ben definito (indipendente dalla scelta fatta).

Definiamo 1) $\vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ su $x \neq 0$

2) $\vartheta = \operatorname{arccotan}\left(\frac{x}{y}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ su $y \neq 0$

1) $d\vartheta = \dfrac{-y \cdot dx + x \cdot dy}{x^2+y^2}$

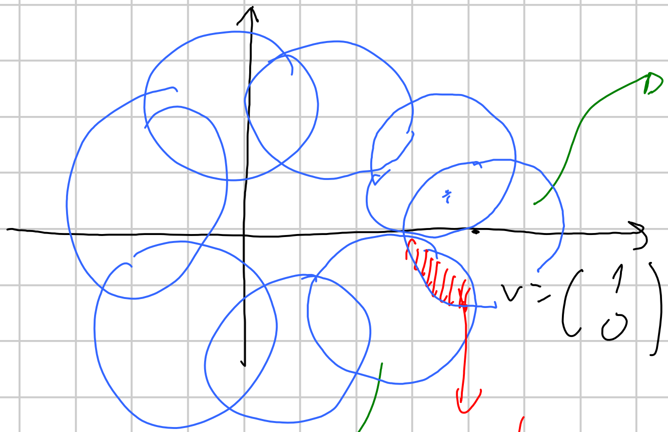
2) $d\vartheta = \dfrac{-y \cdot dx + x \cdot dy}{x^2+y^2}$

$\omega \to \omega$ è una forma chiusa, allora ω ammette localmente (in un intorno B di ogni punto $(x_0, y_0) \in \Omega$) un potenziale U, univocamente determinato una volta fissato $U(x_0, y_0)$.

Per $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B$, $U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_\alpha \omega$, con α curva semplice tra $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

In generale ϑ non sarà definita su tutto Ω.

ϑ è definita su tutto $\Omega \Leftrightarrow w$ esatta su Ω



$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

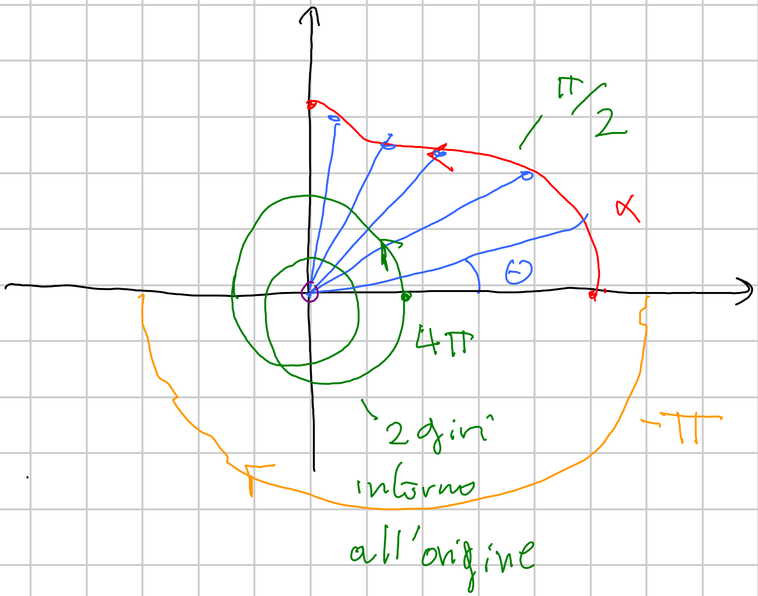
L'altro valore viene dalla prima palla

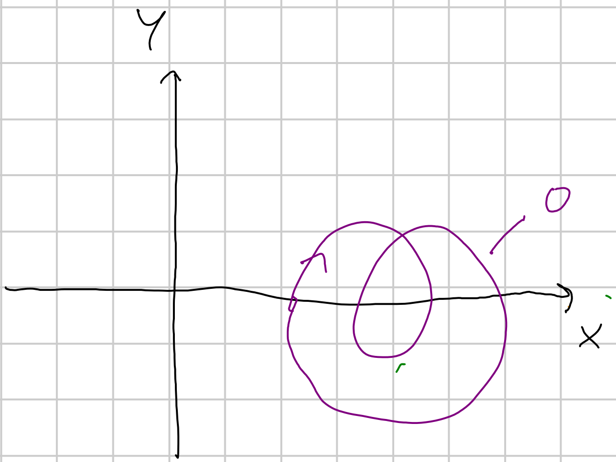
Fissiamo $\Theta(v) = 0$

Due diversi valori per Θ, che differiscono per 2π

un valore viene da questa palla

$$\int_\alpha \omega = \int_\alpha \frac{-y\,dx + x \cdot dy}{x^2+y^2} = \int_\alpha d\theta =$$ "variazione totale dell'angolo θ tra $\alpha(t)$ e l'asse x ottenuta seguendo la curva α"



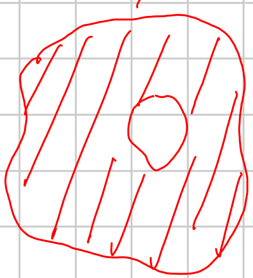


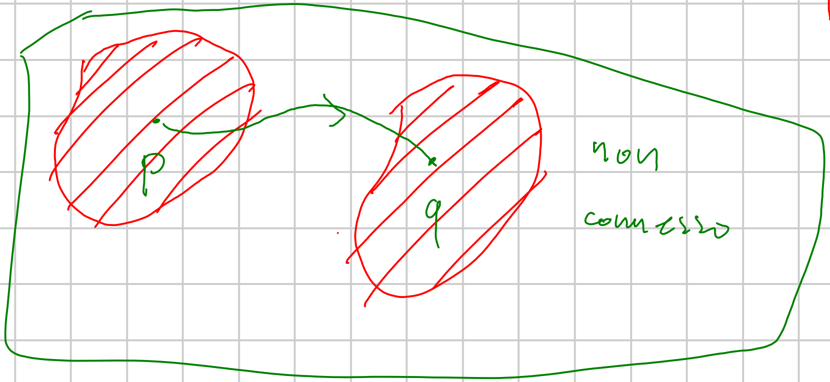
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ sia un aperto connesso e limitato

un solo pezzo

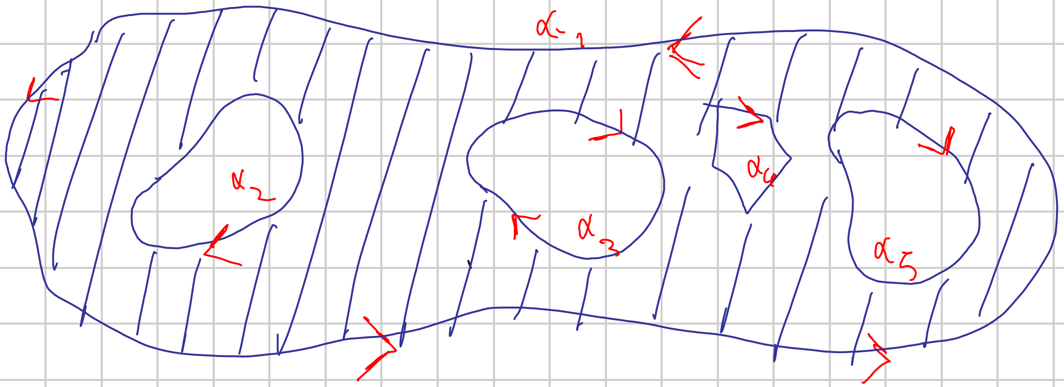
$\forall\, p, q \in \Omega \ \exists\ \alpha : [a,b] \to \Omega$ t.c. $\alpha(a) = p$ $\alpha(b) = q$

connesso





Supponiamo che il bordo di Ω sia costituito da curve (regolari a tratti)



Def: Ω come sopra. Indichiamo con $\partial\Omega$ il bordo di Ω orientato in modo da lasciare Ω a sinistra.

Supponiamo che $\omega = g \cdot dx + h\, dy$ tale che Ω e $\partial\Omega$ siano entrambi contenuti nel dominio di definizione di ω.

Teo (Gauss-Green) Ω, ω come sopra.

Allora $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$ Se $\omega = g\,dx + h\,dy$

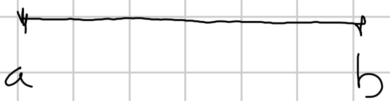
$$d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\cdot \underbrace{dx\,dy}$$

↳ elemento infinitesimo d'area

Oss: Teo fond. calcolo integrale

$$\int_a^b f'(x)\cdot dx = f(b) - f(a) \longrightarrow \int_{[a,b]} df = f(b) - f(a)$$

↓ Analogo in una dim. in -



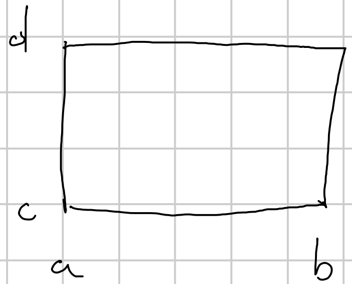
$$\partial([a,b]) = \text{“}b\text{”} - \text{“}a\text{”}$$

$$\int_{\alpha_1} dV = V(\alpha(b)) - V(\alpha(a)) = \int_{\partial\alpha} V$$

Gauss Green $\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$.

Dim: Gauss.-Green:

① Dimostriamo Gauss-Green per $\Omega = [a,b]\times[c,d]$



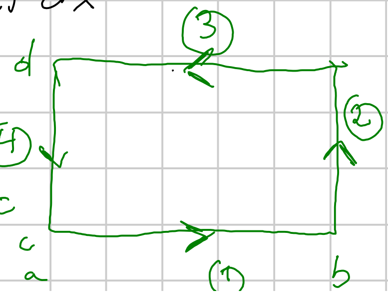
$\omega = g \cdot dx + h \cdot dy$, $d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) \cdot dx\, dy$

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \cdot dx \right) \cdot dy - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \cdot dy \right) \cdot dx =$$

$$= \int_c^d \big(h(b,y) - h(a,y)\big) \cdot dy - \int_a^b \big(g(x,d) - g(x,c)\big) \cdot dx =$$

$$= \underbrace{\int_c^d h(b,y) \cdot dy}_{= \, 2} - \underbrace{\int_c^d h(a,y) \cdot dy}_{= \, 4} - \underbrace{\int_a^b g(x,d) \cdot dx}_{= \, 3} + \overbrace{\int_a^b g(x,c) \cdot dx}^{1 \, =} = \int_{\partial\Omega} \omega$$

$\Omega =$

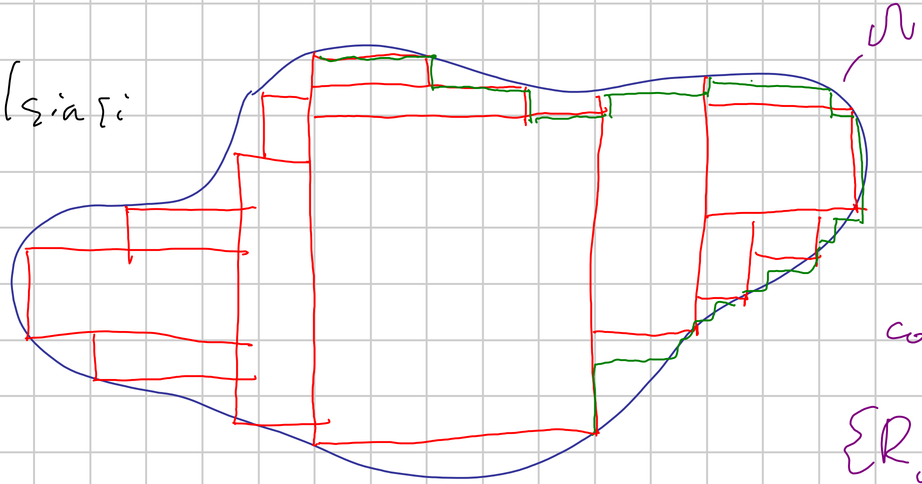


Su (1) e (3) $dy = 0$ $\quad d(y(\alpha(t))) = 0$

su (2) e (4) $dx = 0$ $\quad d(x(\alpha(t))) = 0$

Ok per rettangoli.

o Ω qualsiasi

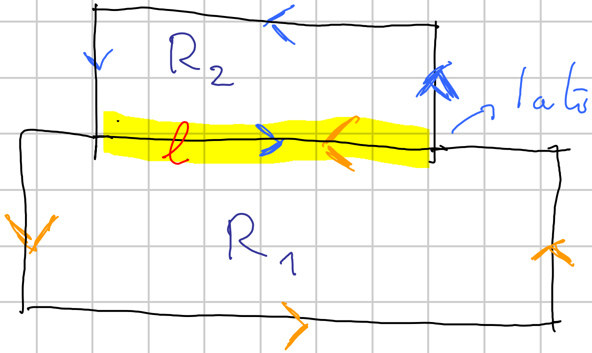


Approssimiamo Ω scrivendolo come unione di rettangoli $\{R_i\}_{i \in I}$

$\forall$ rettangolo R $\quad \int_R d\omega = \int_{\partial R} \omega$

$$\int_{\Omega} d\omega \overset{\text{"}}{=} \sum_{R_i} \int_{R_i} d\omega = \sum_{R_i} \int_{\partial R_i} \omega \overset{\text{"}}{=} \int_{\partial(\cup(R_i))} \omega \dashrightarrow \int_{\partial\Omega} \omega \Rightarrow \int_{\Omega} d\omega \overset{\text{"}}{=} \int_{\partial\Omega} \omega$$

↳ i contributi "interni" si cancellano.



$\ell = \partial R_1 \cap \partial R_2$ è un segmento

Il contributo totale dato da ℓ a $\int_{\partial(\cup(R_i))} \omega = 0$

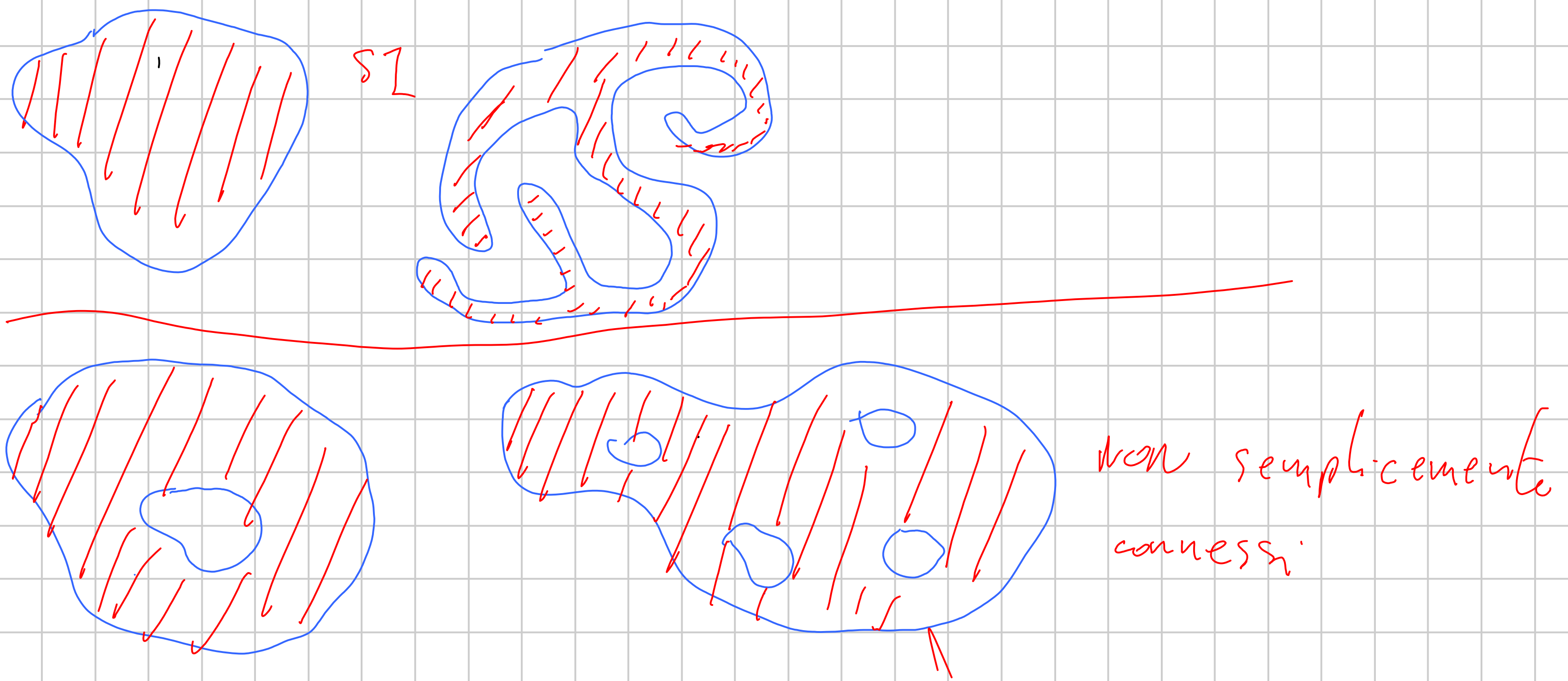
perché le orientazioni indotte

su ℓ da R_1 e R_2 sono opposte

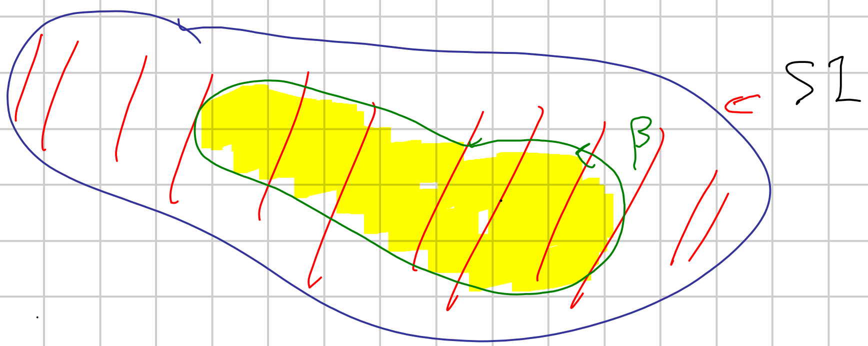
Gauss-Green è dimostrato per Ω arbitrario. □

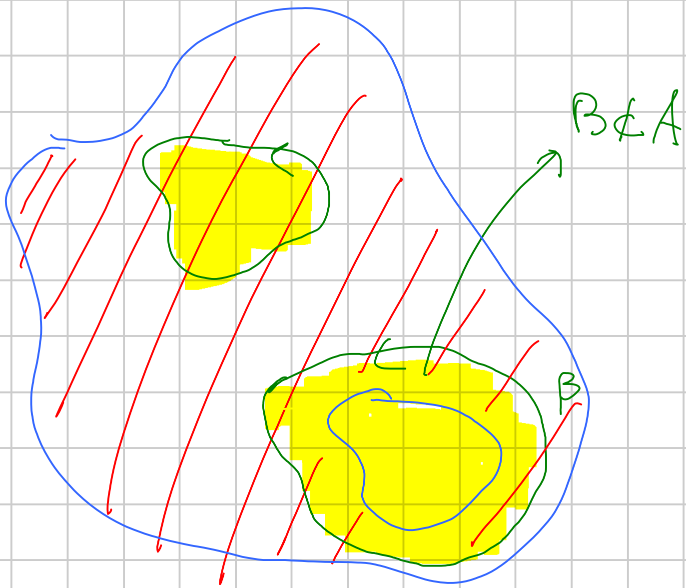
Def: $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto e connesso. Allora A si dice

semplicemente connesso se "non ha buchi".



Formalmente A è semplicemente connesso se, $\forall$ curva semplice chiusa $\beta \subset A$, l'insieme $B \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e con bordo β è contenuto in A.





Prop: Se ω è una forma chiusa definita su A semplicemente connesso, allora ω è esatta su A. → Su A sempl. connesso ω chiusa è equivalente a ω esatta.

Su Ω qualsiasi se ω è chiusa ammette localmente un potenziale.

Poiché ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega$ ammette un intorno sempl. connesso.

$B_\varepsilon\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

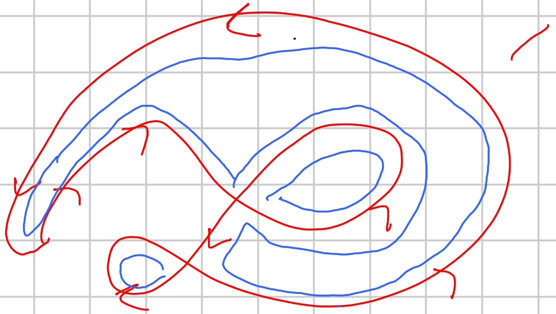
Dim: Basta verificare che $\int_\beta \omega = 0 \quad \forall \beta$ chiusa

β semplice.

$\beta = \partial B$, e $B \subset A$ poiché A è sempl. connesso

Quindi $$\int_\beta \omega = \int_{\partial B} \omega \underset{\text{Gauss-Green}}{=} \int_B d\omega = \int_B 0 \cdot dx \cdot dy = 0$$

Se β è non semplice



β non semplice si decompone come $\cup\, \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n$ di curve semplici

$\int_{\beta} \omega = \int_{\alpha_1} \omega + \ldots + \int_{\alpha_n} \omega$ - riconduciamo al caso di curve

Cor: Una forma chiusa su A con buchi permette sempre potenziali locali ma può non ammettere potenziali globali.