Lezione 24-5-19

$$(t,n,b)' = (t,n,b)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & \boxed{0} & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

↳ matrici di rotazioni infinitesime

matrici di rotazione

$$M_t = \begin{pmatrix} \cos(tk) & -\mathrm{sen}(tk) \\ \mathrm{sen}(tk) & \cos(tk) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial M_t}{\partial t}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

matrice di rotazione infinitesima

Prop: ω esatta $\Leftrightarrow \int_\alpha \omega$ dipende solo dagli estremi di α.

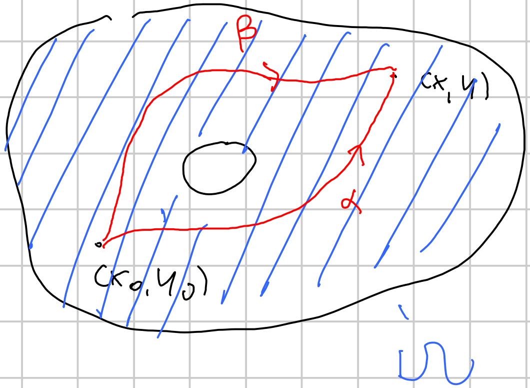
$\Rightarrow \int_\alpha dU = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))$ visto ieri

$\Leftarrow$ Vogliamo costruire un potenziale $U : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $dU = \omega$.

Fissiamo $(x_0, y_0) \in \Omega$. Stabiliamo che $U(x_0, y_0) = 0$

Per $(x, y) \in \Omega$ qualsiasi, definiamo

$U(x,y) = \int_\alpha \omega$, dove α è una qualsiasi curva regolare con estremi (x_0, y_0) e (x, y)



$U(x,y)$ è ben definita grazie alle ipotesi

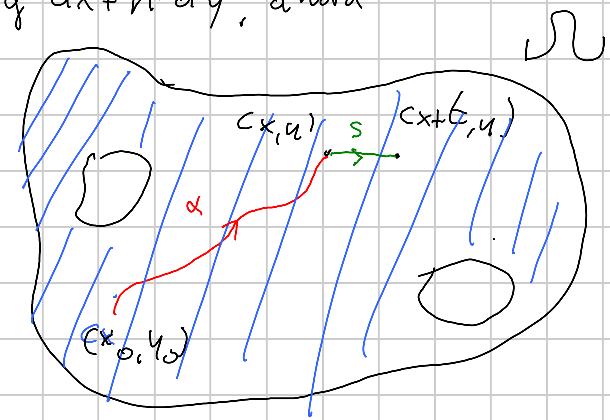
$\left(\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega\right)$ poiché α e β hanno gli stessi estremi

Verifichiamo che $\partial U = \omega$, cioè che se $\omega = g \cdot dx + h \cdot dy$, allora

$$\frac{\partial U}{\partial x} = g, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = h$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{U(x+t,y) - U(x,y)}{t} =$$



$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \left(\underbrace{\cancel{\int_{\alpha} \omega} + \int_{s} \omega}_{U(x+t,y)} - \cancel{\int_{\alpha} \omega} \right) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\int_0^t g(x+u,y) \cdot \overset{dx}{1} + \cancel{h(x+h,y) \cdot \overset{dy}{0}} \right) \cdot du =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t g(x+u,y) \cdot du = g(x,y)$$

teo fond. del calcolo integrale

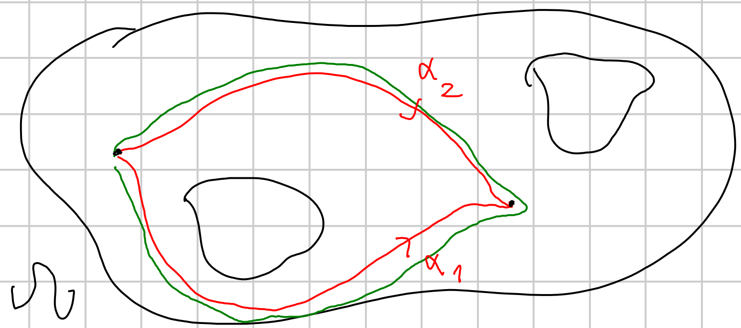
Analogamente $\frac{\partial V}{\partial y} = h$ $\square$

Corollario: ω esatta $\Longleftrightarrow \int_\beta \omega = 0 \quad \forall$ curva β chiusa in Ω.

$\Rightarrow \omega = dU \qquad \int_\beta \omega = \int_\beta dU = U(\beta(b)) - U(\beta(a)) = 0$

poiché β chiusa

$\Leftarrow$ Basta far vedere che $\int_\alpha \omega$ dipende solo dagli estremi di α.



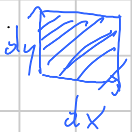
Chiamiamo $\beta =$ "α_1 seguita da α_2 percorsa al contrario". β è chiusa

$$\Rightarrow \underbrace{\int_\beta \omega}_{= 0} = \int_{\alpha_1} \omega - \int_{\alpha_2} \omega = 0 \Rightarrow \int_{\alpha_1} \omega = \int_{\alpha_2} \omega \Rightarrow \int_\alpha \omega \text{ dipende solo dagli estremi di } \alpha.$$

— o —

$\omega = g \cdot dx + h \cdot dy$ vogliamo "definire" un differenziale $d\omega$ per la forma ω

Definiamo $d\omega = d(g \cdot dx + h \cdot dy) = \left(\dfrac{\partial h}{\partial x} - \dfrac{\partial g}{\partial y} \right) \cdot \boxed{dx \cdot dy}$ → elemento d'area



Idea $d(g \cdot dx + h \cdot dy)$ .... rispettare regola di Leibnitz e $ddx = 0$

Def: Una 1-forma ω è chiusa se $d\omega = 0$

Cioè se $\omega = g \cdot dx + h \cdot dy$, ω è chiusa se $\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 0$

Esempio $\omega(x,y) = \underbrace{\operatorname{sen}(y)}_{g(x,y)} \cdot dx + \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{h(x,y)} \cdot dy$

$d\omega = \Big(\underbrace{\cos(x) - \cos(y)}_{\text{non è} \equiv 0 \ \forall \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2}\Big) \cdot dx\, dy$ $\Rightarrow$ ω non è chiusa $\Rightarrow$ ω non è esatta

Prop: Se ω è esatta $\Rightarrow$ ω è chiusa

Dim: ω esatta $\exists\, U$ t.c. $\omega = dU$, cioè se $\omega = g \cdot dx + h \cdot dy$,

vale $\frac{\partial U}{\partial x} = g$, e $\frac{\partial U}{\partial y} = h$

poichè è una funzione con der. 2e continue

Vediamo che $d\omega = 0$, $d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) \cdot dx \cdot dy = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \cdot \partial x}\right) \cdot dx \cdot dy$

Non è vero che ω chiusa $\Rightarrow$ ω esatta.

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\omega(x,y) = \frac{-y \cdot dx + x \cdot dy}{x^2+y^2}$$

ω è chiusa $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

ω chiusa su Ω $\Leftarrow$