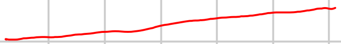
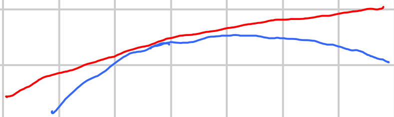
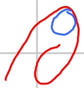
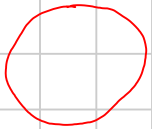
Lezione 22-05-19

Curvatura di una curva regolare

Idea α retta  curvatura 0

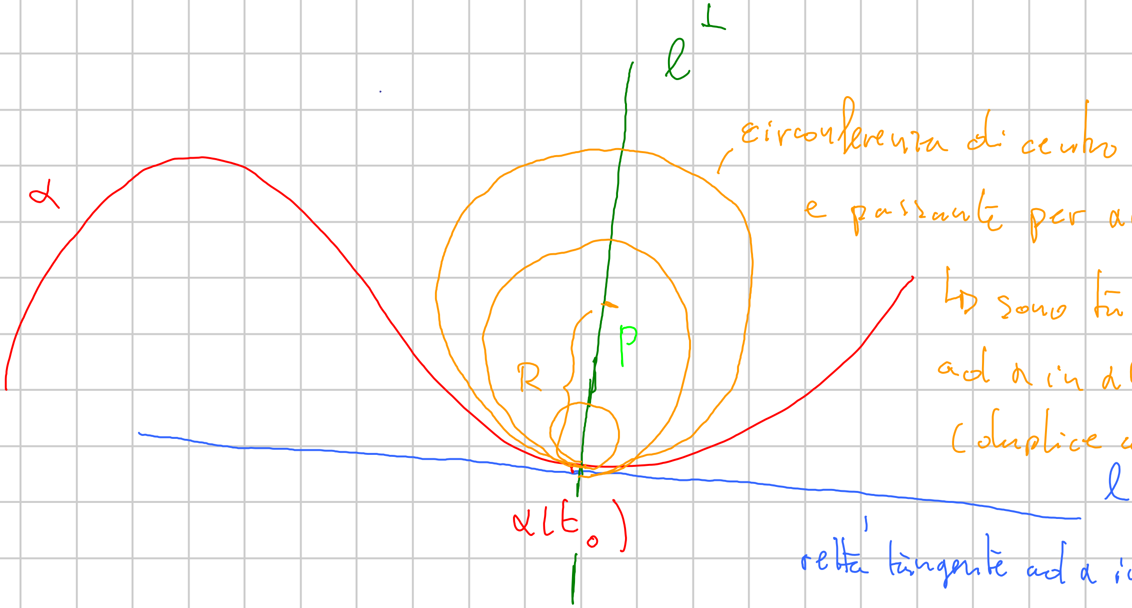
α  curvatura bassa

 curvatura alta

 - circonferenza - curvatura costante.

- circonferenza che meglio approssima α in $\alpha(t_0)$

Idea: definire la curvatura come il reciproco del raggio della circonferenza che meglio approssima α in $\alpha(t_0)$.

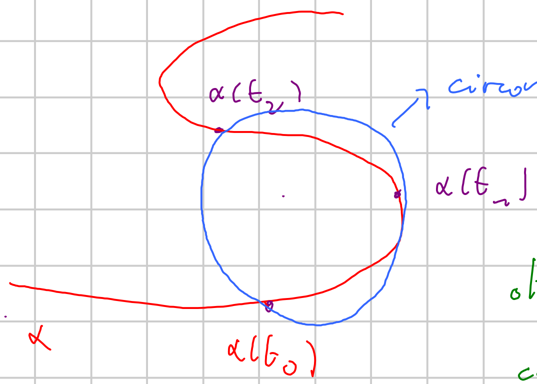


circonferenza di centro P e passante per $\alpha(t_0)$

↳ sono tutte tangenti ad α in $\alpha(t_0)$ (duplice contatto)

retta tangente ad α in $\alpha(t_0)$

Per un preciso valore di R raggio della circonferenza avremo contatto triplo tra la circonferenza e α in $\alpha(t_0)$. $\to$ Questa è la circonferenza che meglio approssima α in $\alpha(t_0)$.



$\to$ circonferenza passante per $\alpha(t_0)$, $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$

Per $t_1 \to t_0$, $t_2 \to t_0$ la circonferenza ottenuta tende alla circonferenza C con triplice contatto con α in $\alpha(t_0)$.

In particolare la funzione $t \mapsto d(\alpha(t), C)$ si annulla in t_0 assieme alla 1a e alla 2a derivata.

Teo: Se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ regolare, α in parametro d'arco $\|\alpha'(t)\| \equiv 1$.

Allora la circonf. con triplice contatto con α in $\alpha(t_0)$ $t_0 \in [a,b]$ e'

quella di centro $\alpha(t_0) + \dfrac{\alpha''(t_0)}{\|\alpha''(t_0)\|^2}$ e passante per $\alpha(t_0)$

$\to$ raggio $= \dfrac{1}{\|\alpha''(t_0)\|}$ $\to |k| = \|\alpha''(t_0)\|$

Lemma: Se $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\|v'(t)\| \equiv 1$, allora $v'(t)$ e'

ortogonale a $v''(t)$, $\quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

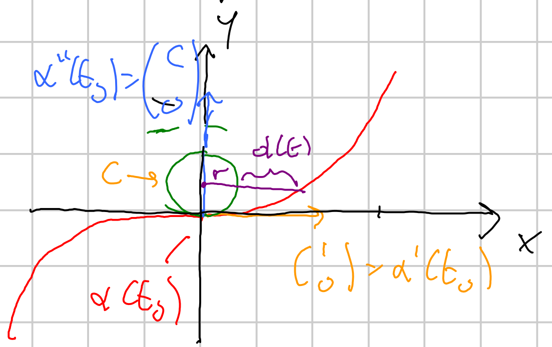
$\langle v'(t), v'(t) \rangle \equiv 1$ $\to$ deriviamo rispetto a t a dx e sx.

$$\frac{d}{dt}\left(\uparrow \right) = 2 v_1'(t) \cdot v_1''(t) + 2 v_2'(t) v_2''(t) + \dots + 2 v_n'(t) \cdot v_n''(t)$$

$$= 2 \cdot \langle v'(t), v''(t) \rangle = 0. \text{ Quindi } \langle v', v'' \rangle \text{ cioe' } v' \perp v'' \quad \square$$

Corollario: Se $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ in parametro d'arco, allora $\alpha''(t) \perp \alpha'(t) \; \forall t$.

Dim Teo. Tramite composizione con una traslazione e una rotazione, possiamo supporre $\alpha(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\alpha'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Per il corollario $\alpha''(t_0)$ è $\perp$ a $\alpha'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Quindi $\alpha''(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ per qualche $c \in \mathbb{R}$

La circonferenza C con triplice contatto ha centro $\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$ e raggio r.
↳ deve passare in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vogliamo calcolare r.

$$d(t) = dist(C, \alpha(t)) = \sqrt{X(t)^2 + (Y(t)-r)^2} - |r| \,, \text{ dove } \alpha(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

Imponiamo $d(t_0) = d'(t_0) = d''(t_0) = 0$.

$d(t_0) = d'(t_0) = 0$

$$d''(t) = \underbrace{-\frac{(XX' + (Y-r)\cdot Y')^2}{\sqrt{(X^2 + (Y-r)^2)^3}}}_{\to 0 \text{ per } t \to t_0} + \frac{X\cdot X'' + X'^2 + (Y-r)\cdot Y'' + Y'^2}{\underbrace{\sqrt{X^2 + (Y-r)^2}}_{\neq 0 \text{ per } t \to t_0}} \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$$

Affinché $d''(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$, si deve avere $X\cdot X'' + X'^2 + (Y-r)\cdot Y'' + Y'^2 \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$

$$\Updownarrow$$

$$1 - r \cdot C = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{C}$$

$$|C| = \frac{1}{\|\alpha''\|} = \frac{\|\alpha''\|}{\|\alpha''\|^2} \quad \text{cvd.}$$

Quindi $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ in parametro d'arco, definiamo

$K(t)$ - curvatura di α in $\alpha(t)$ come

$$K(t) = \pm \frac{1}{\text{raggio della circonf. con triplice contatto}} = \pm \underbrace{\|\alpha''(t)\|}_{\text{se } \alpha \text{ e' in parametro d'arco}}$$

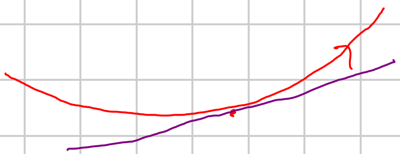
Se $\|\alpha'(t)\| \neq 1$, quindi α non in param. d'arco,

$$K(t) = \frac{\det\left(\alpha'(t), \alpha''(t)\right)}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

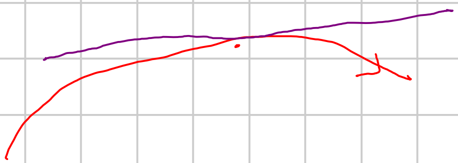
matrice 2×2 $\mathbb{R}$

Se α è orientata

$+$ se α gira verso sx



$-$ se α gira verso dx



Versione 3D della curvatura.

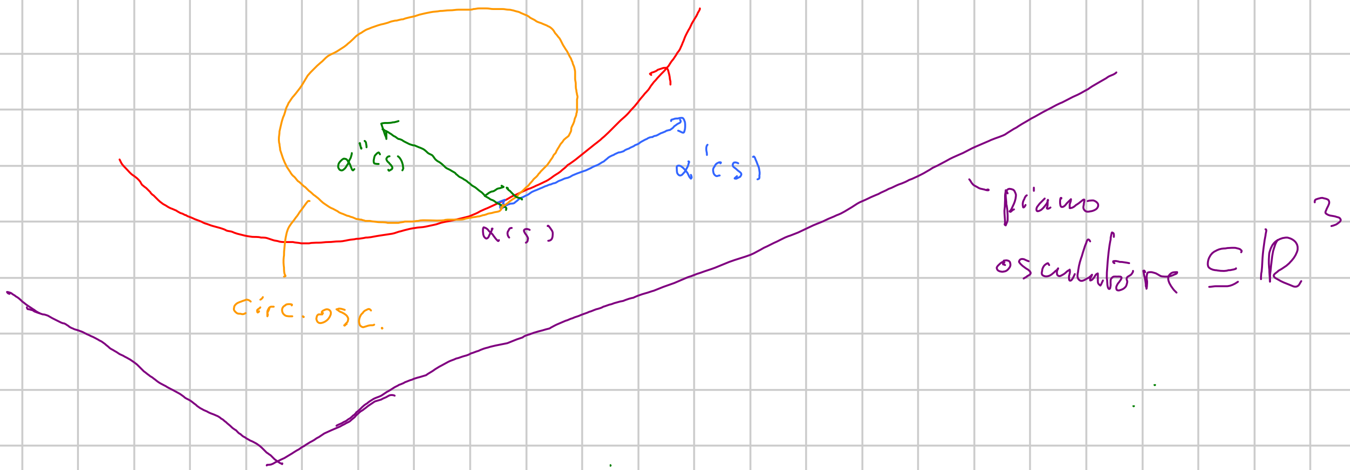
$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ regolare orientata. Supponiamo che α sia in parametro d'arco.

Se $\alpha''(s) \neq 0$ per qualche $s \in [a,b]$.

Allora il piano che ha triplice contatto con α in $\alpha(s)$ è quello passante per $\alpha(s)$, con giacitura $\mathrm{Span}(\alpha'(s), \alpha''(s))$, e si chiama piano osculatore per α in $\alpha(s)$.

La circonferenza che ha triplice contatto con α in $\alpha(s)$ è quella passante per $\alpha(s)$ con centro $\alpha(s) + \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$, e si chiama circonferenza osculatrice.

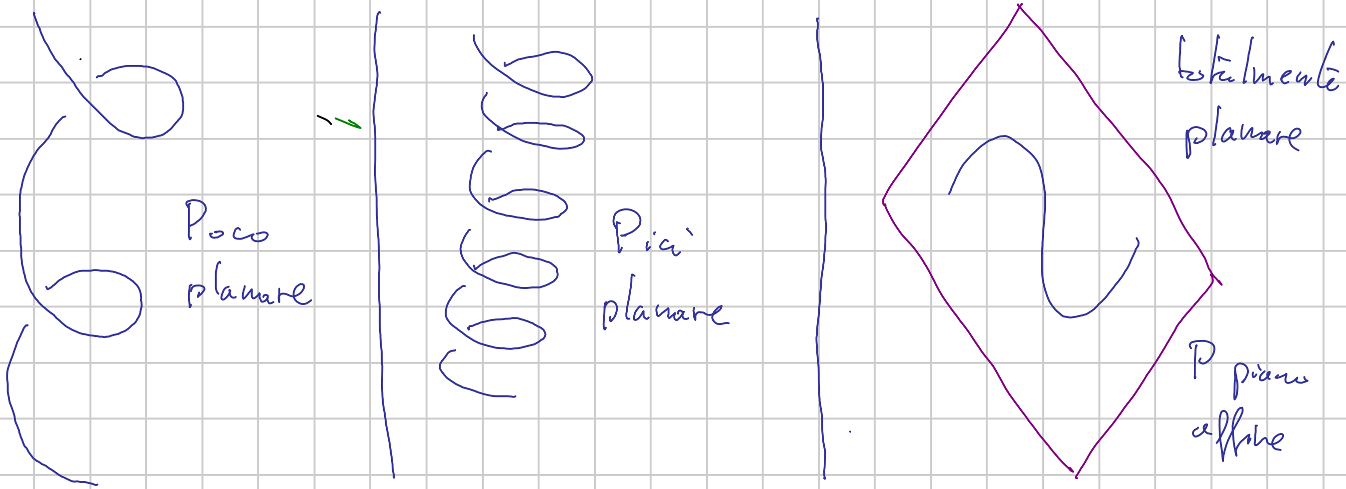
La circonf. osculatrice è contenuta nel piano osculatore.



Def: Definiamo la <u>curvatura di α in α(s)</u> come

$k(s) = \|\alpha''(s)\|$ (Nel caso 3D non ha senso il segno).

Planarità: quanto una curva si discosta dall'essere contenuta in un piano.



- Misura della non planarità è la variazione del piano osculatore.

regolare + $\alpha''(s) \neq 0$ $\forall s \in [a,b]$

Def: Data $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ in parametro d'arco e biregolare

chiamiamo riferimento di Frénet in $\alpha(s)$ la terna di vettori:

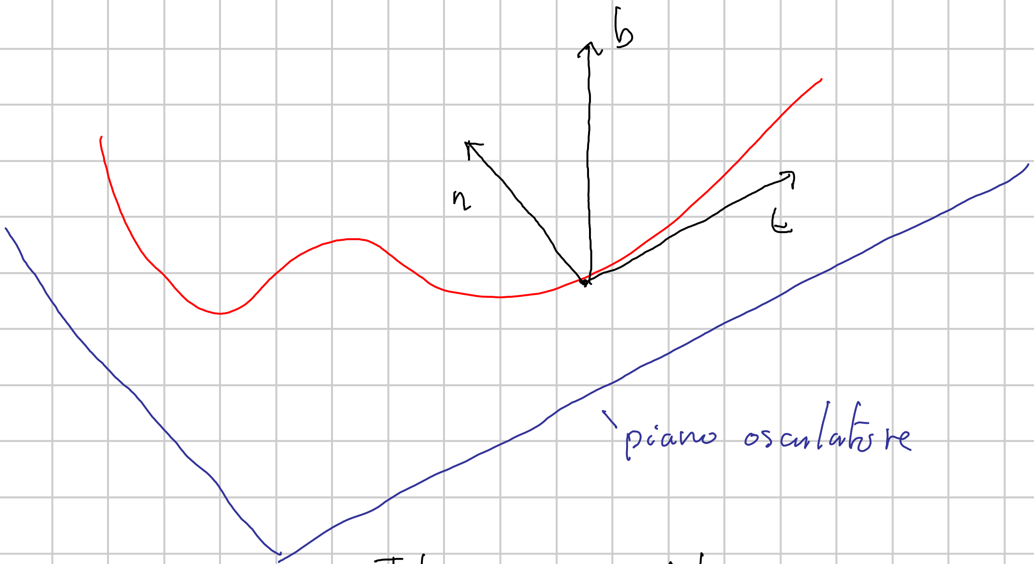
(t, n, b) così definiti:

$t(s) = \alpha'(s)$ $(\|\alpha'\| \equiv 1 \Rightarrow t$ unitario$)$ - tangente

$n(s) = \dfrac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ (n unitario e ortogonale a t) - normale

$b(s) = t(s) \wedge n(s)$ - binormale

In particolare (t, n, b) sono una base ortonormale $\underbrace{\text{positiva}}_{\det = +1}$ di $\mathbb{R}^3$



Il piano osculatore in $\alpha(s)$ è

$$\alpha(s) + \mathrm{Span}\big(t(s), n(s)\big) = \alpha(s) + b(s)^{\perp}.$$

↳ la misura della variazione di $\mathrm{Span}(t, n)$ è la variazione di b.

Prop: Se α è biregolare in parametro d'arco in $\mathbb{R}^3$, $\forall s \in [a,b]$ $\exists$ $\underbrace{\tau(s) \in \mathbb{R}}_{\text{torsione}}$ tale che:

① $b'(s) = -\tau(s) \cdot n(s)$

② $n'(s) = -k(s) \cdot t(s) + \tau(s) \cdot b(s)$

③ $t'(s) = k(s) \cdot n(s)$

Equivalentemente $(t,n,b)' = (t,n,b) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ antisimmetrica

Dim: $\|b(s)\| = 1 \Rightarrow b'(s) \perp b(s)$

$$t'(s) = \alpha''(s) = \underbrace{\|\alpha''(s)\|}_{k(s)} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}}}_{n(s)} \Rightarrow (3)$$

- $b(s) = t(s) \wedge n(s)$.

$$\Rightarrow b'(s) = t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) = \cancel{k(s) \cdot \overset{0}{\overset{\shortparallel}{n(s) \wedge n(s)}}} + t(s) \wedge n'(s)$$

$\Rightarrow b'(s)$ è ortogonale a $t(s)$

$\Rightarrow b'(s)$ è proporzionale a $n(s) \Rightarrow b'(s) = -\overset{\mathbb{R}}{\overset{\Downarrow}{\tau}}(s) \cdot n(s)$. (1)

• (t, n, b) ortonormale positiva $\Rightarrow n = b \wedge t$

$\Downarrow$

(b, t, n) è ortonormale positiva

$$n' = b' \wedge t + b \wedge t' = -\tau \cdot n \wedge t + b \wedge k \cdot n = \tau \cdot b - k \cdot t \quad (2)$$