Esercitazione 10-05-19

11.1.2. Determinare l'equazione della conica descritta.

(b) Ellisse di fuochi $F_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ e parametro $2k = 18$.

È l'insieme dei punti p di $\mathbb{R}^2$

tali che $d(p, F_1) + d(p, F_2) = 18$.

Se $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $p \in \mathcal{L}$-ellisse $\Leftrightarrow$

$$\underbrace{\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}}_{d(p, F_1)} + \underbrace{\sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2}}_{d(p, F_2)} = 18. \quad (*)$$

∘ Riscriviamo (*) come

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2} = 18 - \sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}$$

∘ Elevate al quadrato:

$$\cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}-6y+9 = 18^2 - 36\sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2} + \cancel{x^2}-14x+49+\cancel{y^2}+2y+1$$

$$\left[36^2\cdot\left((x-7)^2+(y+1)^2\right) = \left(18^2-18x+8y+37\right)^2\right] \to \text{equazione polinomiale di 2° grado in } x \text{ e } y$$

.... (conti)

$$972x^2+228xy-5148x+1232y^2-3184y-65521=0$$

$\downarrow$

Equazione polinomiale per l'ellisse data.

(d) Iperbole di fuochi $\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix} = F_1$, $F_2 = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ e parametro $2k=6$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2} - \sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2} = 6$$

Differenza delle distanze dai fuochi sia costante.

Riscriviamo l'equazione come

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2} = 6+\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}$$

Eleviamo tutto al quadrato.

$$\cancel{x^2}-4x+4+\cancel{y^2}+10y+25 = 36+12\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}+\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}+6y+9$$

$$12^2\cdot\left((x-4)^2+(y+3)^2\right) = \left(-32+4x+4y\right)^2$$

→ equazione polinomiale di 2° grado in x e y

$$-24xy-24x+7y^2-10y-161=0$$

→ Equazione dell'iperbole data.

(f) La parabola di fuoco $F = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ e direttrice $4x+7y=8$

Punti equidistanti dal fuoco e dalla direttrice (che è sempre una retta).

$$\sqrt{(x-5)^2+(y+3)^2} = \boxed{\frac{|4x+7y-8|}{\sqrt{16+49}}}$$

→ valore assoluto dell'equazione della direttrice

→ radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti dei termini di grado 1 nell'equazione della direttrice

↳ distanza di un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dalla direttrice

... eleviamo tutto al quadrato e moltiplichiamo a sx e dx per $65 = 16+49$

$$65 \cdot (x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9) = 16x^2 + 49y^2 + 64 + 56xy - 64x - 112y \ldots$$

↳ equazione polinomiale di 2° grado.

Oss: $xy=1$ definisce un'iperbole

11.2.1 Classificare a meno di trasformazioni affini la conica (anche se degenere) definita dall'equazione assegnata:

(e) $4x^2-4xy+y^2-2y=0$

$$\| $$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$ dove $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ simmetrica.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x \; y \; 1) \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

- Se $\det(A)=0$ la conica è degenere.
- Se $\det(A)\neq 0$, abbiamo i seguenti casi:

(1) Se $d_2>0$, $d_1\cdot d_3>0$ $\mathcal{L}=\phi$

(2) Se $d_2>0$ $d_1\cdot d_3<0 \Rightarrow \mathcal{L}$ ellisse

(3) Se $d_2<0 \Rightarrow \mathcal{L}$ è un'iperbole

(4) Se $d_2=0 \Rightarrow \mathcal{L}$ è una parabola.

tutti e soli i casi possibili se $\det(A)\neq 0$ e A è simmetrica.

$\det = d_2$

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & -1 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

$d_1=4>0$, $d_2=0$, $d_3=\det(A)\neq 0$

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=-4$$

Caso (4) $\mathcal{L}$ è una parabola.

(f) $\mathcal{L} = \{x^2 - 2xy - 2x + 1 = 0\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 1 > 0 \quad d_2 = -1 < 0$,

$\det(A) \neq 0$. Caso (3) $\mathcal{L}$ è un'iperbole