Esercitazione 22-03-19

9.3.5. Calcolare l'approssimazione di Taylor del 2° ordine nel punto (0,0) della funzione f assegnata.

$$f(x,y) = y \cdot \cos(x-3y^2) - 2x \cdot \sin(y+5x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y \cdot \sin(x-3y^2) - 2\left(\sin(y+5x^2) + 10x^2 \cdot \cos(y+5x^2)\right) =$$

$$= -y \cdot \sin(x-3y^2) - 2\sin(y+5x^2) - 20x^2 \cdot \cos(y+5x^2).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(x-3y^2) + 6y^2 \cdot \sin(x-3y^2) - 2x \cdot \cos(y+5x^2)$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y \cdot \cos(x-3y^2) - 60x\cos(y+5x^2) + 200x^3 \cdot \sin(y+5x^2)$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\sin(x-3y^2) + 6y^2 \cdot \cos(x-3y^2) - 2 \cdot \cos(y+5x^2) + 20x^2 \cdot \sin(y+5x^2)$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 18 \cdot y \cdot \sin(x-3y^2) - 36 \cdot y^3 \cdot \cos(x-3y^2) + 2x \cdot \sin(y+5x^2).$$

- $f(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

$$f(x,y) = y - 2xy + o(x^2+y^2)$$

$$f(0,0) + \operatorname{grad}(f)\cdot v + v^T H(f)\, v + o(\|v\|^2) \qquad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right), \quad H(f) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

9.3.9. Nello spazio vettoriale V con il prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle$ assegnato, esibire la proiezione ortogonale p sul sottospazio W dato.

$V = \mathbb{R}^2$. $\langle x | y \rangle = {}^t y x$ $\quad W = \{ x : 5x_1 + 12x_2 = 0 \}$

$\dim W = 1$. Cerchiamo $0 \neq w \in W$

Ad esempio $w = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad \{w\}$ è una base (ortogonale) di W.

Allora per ogni v, vale $p_W(v) = \dfrac{\langle v | w \rangle}{\| w \|^2} \cdot w$.

$\| w \|^2 = {}^t w \cdot w = (12 \;\; -5) \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} = 144 + 25 = 169.$

Se $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $P_w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{12x - 5y}{169} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} \to w$

$\langle v | w \rangle = {}^t v \cdot w = (x \ y) \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

9.3.11. $V = \mathbb{R}^2$. $\langle x | y \rangle = {}^t y \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$

Verificare che $\langle \cdot | \cdot \rangle$ è un prodotto scalare

$W = \{ x : 4x_1 - 3x_2 = 0 \}$ $\qquad {}^t y \overset{\shortparallel}{A} x$

$\dim W = 1$. Cerchiamo $0 \neq w \in W$, ad esempio $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$P_w(v) = \frac{\langle v | w \rangle}{\|w\|^2} \cdot w$$

$$\|w\|^2 = \langle w, w \rangle = {}^t w \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = 13 .$$

$${}^t w \cdot \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot w}$$

Ponendo $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$P_w(v) = \frac{{}^t v A \cdot w}{{}^t w A w} \cdot w = \frac{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{7x - 2y}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

9.3.13. $V = \mathbb{R}^3$. $\langle x | y \rangle = {}^t y \cdot x$.

$$W = \left\{ x : \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 = 0 \end{array} \right\} \qquad \dim W = 1.$$

Cerchiamo $0 \neq w \in W$, ad esempio $w = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$.

$$\overset{\|w\|^2}{\overset{\shortparallel}{\langle w, w \rangle}} = 100 + 225 + 81 = 406 \qquad v \in \mathbb{R}^3,\ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$P_w(v) = \frac{\langle v | w \rangle}{\|w\|^2} \cdot w = \frac{\overset{\langle v | w \rangle}{\overset{\shortparallel}{-10x + 15y + 9z}}}{\underset{\|w\|^2.}{\underset{\shortparallel}{406}}} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x | y \rangle = {}^t y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = {}^t y \cdot A \cdot x$$

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 = 0 \end{matrix} \right\}.$$ Cerchiamo $0 \neq w \in W$,

$$w = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$P_w(v) = \frac{\langle v | w \rangle}{\|w\|^2} \cdot w = \frac{{}^t v \cdot A \cdot w}{{}^t w A \cdot w} \cdot w = \frac{20x + 46y + 12z}{598} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

9.3.16.

$V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \quad \langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)\cdot q(-1) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2).$

$W = \mathrm{Span}(t, t^2).$ Verificare che $\langle \, , \, \rangle$ è effettivamente un prodotto scalare su V.