Esercitazione 14/03/19

Recuperi: Martedì 19/3 } ore 16:30 → AULA C32
Martedì 26/3

9.1.3. Verificare che nello spazio $C^0([0,1], \mathbb{R})$, dotato del prodotto scalare $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) \cdot dt$, i vettori S e C, dati da $S(t) = \sin(2\pi t)$, $C(t) = \cos(2\pi t)$, sono ortogonali tra di loro e hanno la stessa norma, trovandone il valore.

Per vedere l'ortogonalità, verifichiamo che $\langle S(t), C(t)\rangle = 0$

$$\langle S(t), C(t)\rangle = \int_0^1 \operatorname{sen}(2\pi t)\cdot\cos(2\pi t)\cdot dt \; *$$

Notiamo che $\sin(x)\cdot\cos(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$

$$* = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(4\pi t)\cdot dt = \frac{1}{8\pi}\int_0^{4\pi} \sin(y)\cdot dy = \frac{1}{8\pi}\left(-\cos(y)\right)\Big|_0^{4\pi} = 0.$$

- Verifichiamo che $\sqrt{\langle S(t), S(t)\rangle} = \sqrt{\langle C(t), C(t)\rangle}$,

equivalentemente verifichiamo $\langle S(t), S(t)\rangle = \langle C(t), C(t)\rangle$, ossia che $\int_0^1 \sin^2(2\pi t)\cdot dt = \int_0^1 \cos^2(2\pi t)\cdot dt$,

equivalentemente $\int_0^1 \sin^2(2\pi t) - \cos^2(2\pi t)\cdot dt = 0$ *

Osserviamo che vale $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$, quindi

$* = \int_0^1 -\cos(4\pi t)\cdot dt = 0$

Cerchiamo valore della norma.

Notiamo che $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$1 = \int_0^1 1 \cdot dt = \int_0^1 \sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t) \cdot dt = \int_0^1 \sin^2(2\pi t) \cdot dt + \int_0^1 \cos^2(2\pi t) \cdot dt =$$

$$= \langle S(t), S(t) \rangle + \langle C(t), C(t) \rangle =$$

$$= 2 \cdot \langle S(t), S(t) \rangle$$

$$\langle S(t), S(t) \rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\langle S(t), S(t) \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$ inoltre per il punto precedente

$$\sqrt{C(t), C(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

9.1.4. Calcolare l'angolo Θ formato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$ nello spazio $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

dotato del prodotto scalare $\langle A | B \rangle = tr({}^tB \cdot A)$.

$$\cos\Theta = \frac{\langle A|B\rangle}{\|A\|\cdot\|B\|}$$

$${}^tB \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & * & * \\ * & 3 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle A \mid B \rangle \doteq \mathrm{tr}({}^tB \cdot A) = 6$$

$${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & * & * \\ * & 5 & * \\ * & * & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle A \mid A \rangle = 11 \Rightarrow \|A\| = \sqrt{11}$$

$${}^tB \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & * & * \\ * & 9 & * \\ * & * & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle B \mid B \rangle = 16 \Rightarrow \|B\| = 4$$

$$\cos\Theta = \frac{6}{4 \cdot \sqrt{11}} \qquad \Theta = \arccos\left(\frac{3}{2\sqrt{11}}\right) \in [0,1]$$

9.1.5. Stabilire se l'applicazione f assegnata sia bilineare, in tal caso se sia simmetrica, in tal caso se sia definita positiva.

(b) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = 7x_1y_2 + 8y_1y_2 - 5x_2y_1$.

problema.

$f(0,y) = 8 \cdot y_1 \cdot y_2$

$f(0,\lambda y) = \lambda^2 \cdot 8 \cdot y_1 \cdot y_2 = \lambda^2 \cdot f(0,y) \neq \lambda \cdot f(0,y)$ no linearità nel secondo fattore.

d) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x, y) = -3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 8x_2y_1 + 7x_2y_2$.

E' bilineare (polinomio omogeneo di 1° grado nelle coordinate di x una volta che abbiamo fissato le coordinate di y, e viceversa).

Non è simmetrica: i coefficienti dei monomi "misti" in x_1y_2 e x_2y_1 sono diversi

$f(e_1, e_2) = 2$ (sostituendo $\begin{matrix} x_1=1 & y_1=0 \\ x_2=0 & y_2=1 \end{matrix}$)

$\neq$

$f(e_2, e_1) = 8$ $\begin{pmatrix} x_1=0 & y_1=1 \\ x_2=1. & y_2=0 \end{pmatrix}$

(f) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = 7x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - 4x_2y_2$.

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Bilineare e simmetrica.

$\Downarrow$

notiamo che $f(e_1, e_2) = f(e_2, e_1) = -3$ per bilinearità

da' $f(v,w) = f(w,v) \quad \forall\, v,w \in \mathbb{R}^2$.

- È definita positiva? NO, infatti $f(e_2, e_2) = -4$ $\begin{pmatrix} x_1 = y_1 = 0 \\ x_2 = y_2 = 1 \end{pmatrix}$

(h) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$. Bil. + simm. ok

$f(x,x) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$. Prendiamo $x = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$f(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = 3 - 8 + 5 = 0$

Quindi abbiamo trovato un vettore v $(e_1 - e_2)$

tale che v è non nullo e $f(v,v) = 0$

(j) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = 4x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$. Bilineare + simmetrica

• Def. positiva: $f(x,x) = 4 \cdot x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ $*$

$$(2x_1 + t \cdot x_2)^2 = 4x_1^2 + 4t\, x_1 \cdot x_2 + t^2 \cdot x^2$$

Poniamo $4t = -6$ $t = -\frac{3}{2}$, quindi $(2x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 =$

$= 4 \cdot x_1^2 - 6x_1 x_2 + \frac{9}{4} x_2^2$, quindi

$$f(x,x) = \left(4 \cdot x_1^2 - 6x_1 \cdot x_2 + \frac{9}{4} x_2^2\right) + \frac{11}{4} x_2^2 = \left(2x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{11}{4} \cdot x_2^2 \geq 0$$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Inoltre $f(x,x) = 0 \iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 - \frac{3}{2}x_2 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = 0$

$\Updownarrow$

$x = 0$

(k) $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_3y_3$

È bilineare ma non simmetrica

poiché $f(e_1, e_2) = 2$, mentre $f(e_2, e_1) = -3$

(l) $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$ — matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica è simmetrica $\Rightarrow$ f è simmetrica

$$f(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + \left[2x_2^2 + 6x_2x_3 + 2x_3^2\right]$$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

$x_3 = -1$

$$f(e_2 - e_3, e_2 - e_3) = 2 - 6 + 2 = -2 < 0$$

quindi f non è definita positiva.

(m) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$ bilineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

È def. positiva?

$$f(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 =$$

$$2x_2^2 + (x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2) + 2x_3^2 = 2x_2^2 + (x_1+x_3)^2 + 2x_3^2 \geq 0$$

$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$$f(x,x) = 0 \iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = x_3 = 0 \iff x = 0.$$